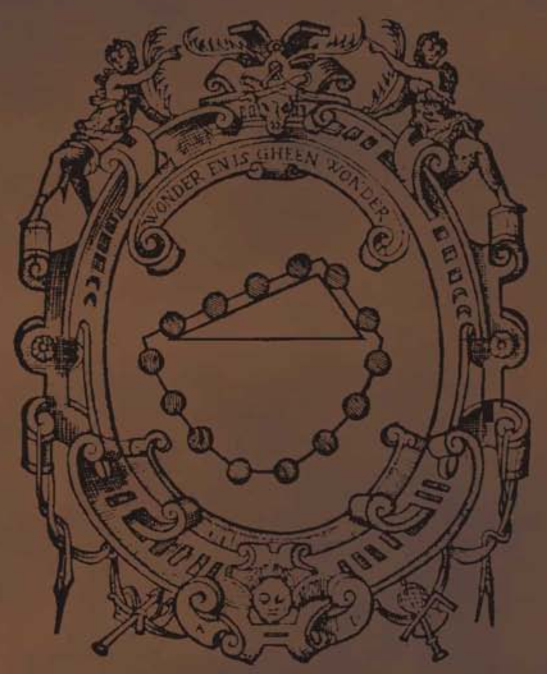


Эрнст Мах

МЕХАНИКА



ИСТОРИКО - КРИТИЧЕСКИЙ ОЧЕРК ЕЁ РАЗВИТИЯ



Эрнст Мах

МЕХАНИКА

Историко-критический очерк ее развития

Разрешенный автором перевод с 6-го исправленного и дополненного немецкого издания

Г. А. Котляра

Под редакцией профессора Н. А. Гезехуса

Редакция журнала
«Регулярная и хаотическая динамика»

Ижевск 2000

УДК 531

Мах Э.
Механика. Историко-критический очерк ее развития. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. 456 стр.

Книга известного физика Эрнста Маха посвящена физическим основам и историческому развитию механики. В ней также затронуты философские вопросы естественных наук, что препятствовало ее выходу в советский период в связи с критикой В. И. Лениным. За рубежом книга выдержала несколько десятков изданий, в России книга выходила в дореволюционный период и давно стала раритетом.

Будет интересна широкому кругу читателей — от специалистов в области естественных наук до философов и историков.



Оригинал-макет подготовлен в редакции журнала «Регулярная и хаотическая динамика»
http://www.rcd.com.ru

Содержание

Предисловие к первому изданию

Предлагаемая книга — не учебник, по которому можно было бы изучать законы механики. Ее тенденция скорее разъясняющая или, еще яснее выражаясь, антиметафизическая.

И математика здесь дело совершенно побочное. Кого, однако, интересуют вопросы, в чем заключается *естественнонаучное* содержание механики, *каким образом* оно было достигнуто, каковы *источники*, из которых оно было нами почерпнуто, в какой мере мы можем рассматривать его, как прочное наше достояние, — тот найдет, надеемся, в этой книге некоторые разъяснения. Именно это содержание, представляющее величайший и самый общий интерес для каждого естествоиспытателя, каждого мыслителя, заключается в скрытом состоянии в интеллектуальном специальном аппарате современной механики.

Ядро идей механики развилось почти исключительно в процессе изучения весьма простых специальных случаев процессов механики, и исторический анализ познания этих случаев остается и до настоящего времени самым действительным естественным средством для раскрытия этого ядра. Можно даже сказать, что только этим путем может быть достигнуто полное понимание наиболее общих результатов механики. Исходя из этой мысли, я выбрал изложение, несколько распространенное, но зато весьма понятное. Ввиду недостаточно развитой еще в настоящее время точности обычного разговорного языка, я вынужден был иногда, чтобы не жертвовать делом форм, прибегать к кратким и точным выражениям математики.

Разъяснения, предлагаемые в настоящей книге, частью и в зародыше содержатся уже в моем сочинении «Die Geschichte und die Wurzel des Satzes der Erhaltung der Arbeit», Prag, Calve, 1872[1]. Хотя сходные до некоторой степени взгляды были высказаны впоследствии Кирхгоффом («Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik», Leipzig, 1874[2]) и Гельмгольцем («Die Tatsachen in der Wahrnehmung», Berlin, 1879[3]) и частью получили даже характер общих мест, тем не менее это не исчерпывает, мне кажется, того, что мне нужно сказать, и моя книга далеко не излишняя.

[1] Принцип сохранения работы. История и корень его. Есть рус. пер. — *Прим. пер.*

[2] Лекции по математической физике. Механика.

[3] Факты в восприятии.

С основным моим взглядом на природу всякой науки, как *экономии мышления*, намеченным мною в упомянутом выше сочинении, как и в другом («Die Gestalten der Flüssikeit», Prag, Calve, 1872[1]) и развитым немного более в моей торжественной академической речи («Die Oekonomische Natur der physikalischen Forschung», Wien, Gerold, 1882[2]), я в настоящее время уже не один. Очень близкие к моим идеи развил по-своему Р. Авенариус («Philosopie als Denken der Welt gemäss dem Princip des kleinsten Kraftmaasses», Leipzig, Fues, 1876[3]), что доставило мне особое удовлетворение. Мое уважение перед истинно философским стремлением слить все ручьи наших знаний в один поток вообще не ускользнет, надеюсь, от внимания читателя настоящей книги, несмотря на всю решительную оппозицию против посягательств *спекулятивного* метода.

Разбираемые здесь вопросы интересовали меня с ранней юности, и этот интерес к ним был мощно усилен чудесными введениями Лагранжа к главам его аналитической механики, как и ясно и свежо написанной маленькой работой Jolly («Principen der Mechanik», Stuttgart, 1852[4]). Ценная книга Дюринга («Kritische Geschichte der Principen der Mechanik», Berlin, 1873[5]) не оказала уже заметного влияния на мои взгляды, так как ко времени ее появления они были по существу уже закончены и даже высказаны. При всем том можно будет и здесь найти кое-какие точки соприкосновения, по крайней мере, относительно *отрицательной* стороны критики.

Изображенные и описанные здесь новые аппараты для опытов все конструированы мной и построены господином F. Hajek, механиком руководимого мной физического института.

В более слабой связи с текстом стоят точные воспроизведения находящихся в моем распоряжении старых оригиналов. Но своеобразные и наивные черты великих исследователей, сказывающиеся в них, действовали на меня очень освежающим образом в моих работах, и я желал бы, чтоб мои читатели получили то же удовольствие.

Прага, май 1883 **Автор**

[1]Формы жидкостей.

[2]Экономическая природа физического исследования.

[3]Философия, как мышление о мире соответственно принципу наименьшей меры сил. Есть рус. пер. — *Прим. пер.*

[4]Принципы механики.

[5]Критическая история принципов механики.

Предисловие ко второму изданию

Первое большое издание настоящей книги встретило благосклонное к себе отношение, и не прошло полных пяти лет, как оно было распродано. Это обстоятельство, как и обнародованные с тех пор сочинения таких авторов, как E. Wohlwill, H. Streintz, L. Lange, I. Epstein, F. A. Müller, I. Popper, G. Helm, M. Planck, F. Poske и др., доказывают тот отрадный факт, что в настоящее время привлекают к себе внимание вопросы теории познания, которыми двадцать лет тому назад никто еще почти не интересовался.

Основательные перемены в моем изложении казались мне еще нецелесообразными, вследствие чего я, что касается текста, ограничился исправлением опечаток, а появившихся с тех пор сочинения я по мере возможности разобрал в «приложении».

Прага, июнь 1888 **Автор**

Предисловие к третьему изданию

Во время тщательного пересмотра настоящей книги, предпринятого господином Mc. Cormack'ом, по случаю перевода ее на английский язык, были замечены некоторые недосмотры, которые и устранены в настоящем третьем издании. Исправлены также некоторые ошибки, случайно замеченные другими.

Интерес к основам механики продолжает возрастать, что доказывают обнародованные с 1889 г. сочинения Budde, P. и J. Friedländer, H. Hertz'a, P. Johannesson'a, K. Lasswitz'a, MacGregor'a, K. Pearson'a, J. Petzoldt'a, Rosenberger'a, E. Strauss'a, Vicaire, P. Volkmann'a, E. Wohwill'a и др., из которых многие должны быть, хотя бы в краткой форме, рассмотрены в настоящей книге.

Работа K. Pearson'a («Grammar of Science», London, 1892) познакомила меня с исследователем, теоретико-познавательные взгляды которого вполне совпадают с моими во всех существенных пунктах и который свободно и смело умеет выступить против тенденций в науке, не имеющих с нею ничего общего. Механика в настоящее время обнаруживает как будто тенденцию вступить в новые отношения к физике, что в особенности обнаруживается в работах Г. Герца. На намечающийся переворот в воззрении на силы, действующие на расстоянии, должны были оказать известное влияние интересные исследования H. Seeliger'a («Ueber das Newton'sche Gravitionsgesetz», Sitzungsber.

d. Münchener Acad. 1896[1]), доказавшего несовместимость строгого ньютонова закона с допущением безграничной массы мироздания.

Вена, январь 1897 **Автор**

Предисловие к четвертому изданию

Число друзей тех взглядов, которые проводятся в настоящей книге, по-видимому, возросло в течение последних семнадцати лет, и частичное обсуждение их в сочинениях Boltzmann'a, Föppl'a, Hertz'a, Love, Maggi и др. внушает мне надежду, что моя работа не пропала даром. Особенно обрадовало меня то, что я в J. Stallo («The concepts of modern physics»[2]) нашел еще одного единомышленника в моем отношении к метафизике и в W. K. Clifford'e («Lectures and essays» и «The common sense of the exact sciences»[3]) — мыслителя родственных целей и взглядов.

Новые, касающиеся предмета работы, как и приведенные против моих взглядов возражения рассмотрены мной в особых вставках, местами довольно обширных. Среди последних было для меня особенно ценно замечание O. Hölder'a относительно моей критики выводов Архимеда («Denken und Anschauung in der Geometrie»[4]), так как оно побудило меня к более подробному обоснованию моего взгляда. Что и в механике столь же возможны безусловные неоспоримые доказательства, как в математике, я и не оспаривал. Тем не менее я не считаю возможным отказаться от своего мнения насчет вывода Архимеда, как и некоторых других выводов.

Возможно, что кое-какие специальные исторические исследования внесут некоторые небольшие поправки в мое изложение. При всем том я надеюсь, что в общем и целом набросанная мною картина развития механики в ее прошлом и в вероятном будущем вполне верна. Вследствие этого я сохранил основной текст, от которого позднейшие вставки отделены. Я не желал бы также, чтоб он был изменен в случае, если бы после моей смерти потребовалось еще одно новое издание.

Вена, январь 1901 **Автор**

[1] О законе тяготения Ньютона.
[2] Теории и понятия современной физики. Есть рус. пер. — *Прим. пер.*
[3] Лекции и этюды. Здравый смысл точных наук.
[4] Мышление и воззрение в геометрии.

Предисловие к пятому изданию

Выражаю здесь свою живейшую благодарность за поправки, предложенные мне частью в печатных рецензиях, частью в письмах учеными S. Günther, H. Kleinpeter, E. Lampe, P. M. Milne, P. Volkmann, K. Zahradnicek и G. Zemplén. Не все советы были мною исполнены и более тщательное обсуждение содержания соответствующих мест книги, может быть, оправдает это мое отношение.

И в настоящем издании сделаны некоторые дополнения. В особенности можно указать на разбор более новых работ по вопросу о законе инерции.

Появившийся недавно французский перевод настоящей книги побудил меня подробнее познакомиться с французской методологической литературой по механике. Такие сочинения как G. Lechalas («Etude sur l'espace et le temps», 1896[1]), E. Picard («Quelques reflexions sur la mécanique», 1902[2]), H. Poincaré («La sciénce et l'hypotése», 1903[3]) и в особенности обнаруживающая столь глубокие взгляды книга P. Duhem'a («L'évolution de la mécanique», 1903[4]) внушают мне надежду, что мое сочинение встретит благосклонный прием и во Франции, где прокладывались уже близкие к моему пути.

Вена, март 1904 **Автор**

Предисловие к шестому изданию

Работы Anding'a, Duhem'a, Föpll'a, Hartmann'a, Seeliger'a, Vailati и Wohlwill'a рассмотрены мною в шести отчасти довольно обширных добавлениях к тексту, на которые в тексте имеются ссылки. За советы насчет дополнений и улучшений я обязан благодарностью г. E. Lampe в Берлине и г. V. Samter в North Woburn, Mass.

Вена, ноябрь 1907 **Автор**

---

[1] Этюд о пространстве и времени.

[2] Размышления о механике.

[3] Наука и гипотеза. Есть рус. пер. — *Прим. пер.*

[4] Эволюция механики.

Введение

1. Древнейшая и наиболее простая часть физики, рассматривающаяся также поэтому как основа для понимания многих других ее частей, занимается изучением движения и равновесия масс. Она носит название механики.

2. История развития механики, знакомство с которой, безусловно, необходимо для полного понимания и современной формы этой науки, представляет простой и поучительный пример тех процессов, которыми вообще развивается естествознание.

Инстинктивное непроизвольное знание процессов природы всегда, вероятно, предшествовало научному произвольному познанию, *исследованию* явлений. Первое приобретается вследствие связи, существующей между процессами природы с одной стороны и удовлетворением наших потребностей — с другой. Приобретение элементарнейших познаний не является даже, без сомнения, делом одного индивидуума, а подготовляется развитием рода.

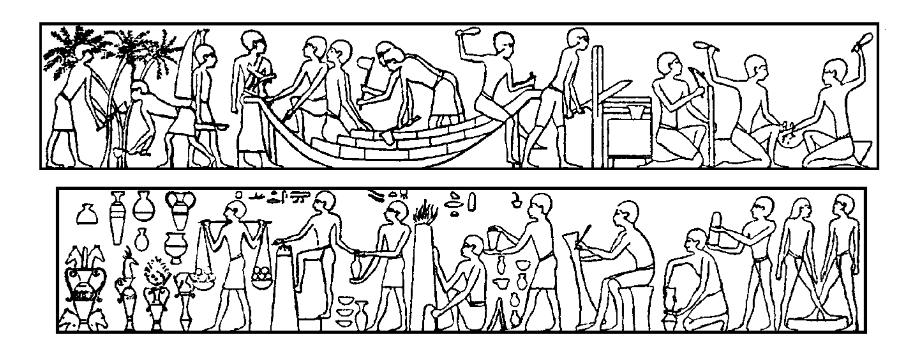


Рис. 1

В действительности нам нужно различать между механическими данными опыта и наукой механики в современном смысле. Первые, без сомнения, весьма древнего происхождения. Если присмотреться к памятникам древних египтян или ассирийцев, мы найдем в них изобра-

жения некоторых орудий и механических приспособлений, между тем как известия о научных познаниях этих народов или совершенно отсутствуют, или указывают на очень низкую ступень их. Рядом с орудиями, весьма остроумно придуманными, мы замечаем очень грубые приемы, как, например, перевозку огромных каменных глыб на санях. Все носит характер инстинктивного, непродуманного, случайно найденного.

И в гробницах доисторической эпохи было найдено множество орудий, изготовление и употребление которых предполагает немалые технические навыки и кое-какие опытные знания по механике. Таким образом, в эпоху, когда о теории в современном смысле не могло быть и речи, мы находим орудия, машины и опытные познания по механике.

3. Порой приходит в голову мысль, что неполные письменные памятники внушают нам ложное мнение о народах древности. У некоторых древних авторов встречаются места, указывающие как будто на гораздо более глубокие познания, чем те, которые обыкновенно приписывают этим народам. Рассмотрим для примера только одно место у Витрувия (De architectura, Lib. V, cap. III, 6). Оно гласит:

«Голос же есть текучее дуновение и вследствие движения воздуха воспринимается слухом; он распространяется бесконечными кругами так, как в стоячей воде, если бросить в нее камень, образуется бесчисленное множество круговых волн; эти волны, разрастаясь, насколько возможно, распространяются от центра, если только их не останавливает узкое место или какая-нибудь другая помеха, мешающая им дойти до конца; ибо в таком случае первые волны, задержанные какой-нибудь помехой, ударяются обратно и тем вносят беспорядок в круговые линии последующих волн. По тому же закону и голос вызывает такие же круговые движения; но в воде круги остаются на поверхности, распространяясь только в ширину, голос же с одной стороны распространяется в ширину, а с другой — постепенно поднимается вверх».

Не кажется ли, что читаешь здесь какого-нибудь популярного писателя, недостаточно основательное сочинение которого дошло до нас, между тем как более основательные сочинения, из которых он черпал свои познания, до нас не дошли? Не явимся ли и *мы* через тысячелетия в несколько странном свете, если только нашей популярной литературе, которая уже по массе своей труднее поддается разрушению, суждено пережить научную литературу? Правда, это благоприятное впечатление опять разрушается множеством других мест, содержащих столь

грубые и очевидные ошибки, какие едва ли возможны при более или менее высокой научной культуре.

Впрочем, чем больше мы узнаем об античной естественнонаучной литературе по новейшим исследованиям, тем благоприятнее становится наше мнение о ней. Так, Скиапарелли очень много сделал для того, чтобы заставить нас высоко ценить астрономию греков, а Гови раскрыл перед нами богатые сокровищницы своим изданием оптики Птоломея. Распространенное до недавнего времени мнение, будто у греков эксперимент был в полном пренебрежении, в настоящее время не может уже быть удержано в прежнем объеме. Древнейшими экспериментами были, по-видимому, опыты пифагорейцев, которые пользовались монохордом с передвижной подставкой для определения длины струны соответственно гармоническим соотношениям. Доказательство Анаксагора телесности воздуха при помощи надутого закрытого кожаного мешка и то же доказательство Эмпедокла при помощи сосуда, опущенного в воду отверстием вниз (Arist. Phys.), — все это примитивные эксперименты. Планомерные опыты над преломлением света мы находим уже у Птоломея, и его физиолого-оптические наблюдения не потеряли интереса и в настоящее время. Аристотель (Meteor.) сообщает о наблюдениях, приводящих к объяснению радуги. Бессмысленные саги, способные возбудить наше недоверие, как, например, рассказ о Пифагоре и кузнечных молотах, издававших гармонический интервал, соответствующий их весу, обязаны своим происхождением, может быть, фантазии невежественных рассказчиков. Изобилие таких сообщений, не проверенных критикой, мы находим у Плиния. В основе своей эти сообщения не хуже и не неправильнее, чем рассказы о падающем яблоке Ньютона или о котле Уатта. Они становятся, может быть, еще понятнее, если принять в соображение трудность и дороговизну изготовления античных сочинений и обусловленное этим скудное распространение их. Все, что в тесных рамках можно сказать по этим вопросам, можно найти в работе I. Müller'а «Ueber das Experiment in den physik. Studie der Griechen»[1]. Naturwiss. Verein zu Innsbruck, XXIII, 1896–97.

4. Когда, где и каким образом началось в действительности развитие науки, в настоящее время трудно установить исторически. При всем том, однако, представляется естественным принять, что инстинктивное накопление данных опыта предшествовало научной систематизации их. Следы этого процесса могут быть еще доказаны и в современ-

[1]Об эксперименте в физических исследованиях греков.

ной науке, и мы можем даже иногда наблюдать этот процесс на самих себе. Опыт, приобретаемый непроизвольно и инстинктивно человеком, стремящимся к удовлетворению своих потребностей, он и применяет бессознательно и без размышлений. Сюда относится, например, первый опыт, касающийся применения рычага в самых различных формах. То, что находят инстинктивно и без размышлений, не может и показаться чем-то особым, чем-то удивительным, совсем не заставляет обыкновенно и задумываться.

Переход к систематическому научному познанию и пониманию фактов возможен лишь тогда, когда развились уже особые сословия, ставящие себе задачей жизни удовлетворение определенных потребностей общества. Такое сословие занимается особыми классами процессов природы. Но лица этого сословия сменяются: выступают из него старые члены и вступают новые. И вот возникает необходимость сообщить новопоступающим существующий уже опыт, возникает необходимость сказать им, от каких обстоятельств собственно зависит успех при преследовании той или другой цели. Только получив такое сообщение, человек бывает вынужден к точному размышлению, что каждый человек может наблюдать на себе самом еще и в настоящее время. С другой стороны, то, чем старые члены сословия занимаются по привычке, новопоступающему члену кажется чем-то необычным и побуждает его к размышлению и исследованию.

Если хотят познакомить человека с известными явлениями или процессами природы, то для этого существуют два пути: или заставляют его самого наблюдать их, но тогда здесь нет никакого преподавания, или приходится описать ему каким-либо образом процессы природы, чтобы сберечь для него труд самому сызнова проделать каждый опыт. Но описывать возможно только процессы, постоянно повторяющиеся, или, по крайней мере, состоящие из частей, постоянно повторяющихся. Описано, абстрактно воспроизведено в мыслях может быть только то, что однообразно, закономерно, ибо описание предполагает употребление названий для элементов — названий, понятных только в случае элементов, постоянно повторяющихся.

5. В многообразии процессов природы кое-что кажется обычным, другое — необычным, запутанным, неожиданным и даже противоположным обычному. Покуда оно так, спокойного, единого воззрения на природу нет. Отсюда возникает задача отыскать однородные элементы процессов природы, существующие всегда, несмотря на все многообразие их. Этим, с одной стороны, становится возможным самое эконом-

ное, самое краткое описание и сообщение. С другой же стороны, раз усвоена способность узнавать эти постоянные элементы в самых многообразных процессах, видеть их в последних, то это приводит к *обобщающему, единому, свободному от противоречий и легкому постижению фактов.* Раз дело дошло до того, что мы везде замечаем одни и те же немногие простые элементы, сочетающиеся привычным для нас образом, они представляются нам чем-то знакомым, что не является уже для нас неожиданностью, что не чуждо и не ново нам в явлениях; мы чувствуем себя свободными, наблюдая их, они нас более не смущают, они уже не запутаны, они *объяснены.* Здесь происходит процесс приспособления наших мыслей к фактам действительности.

6. Экономия сообщения и понимания составляет сущность науки, в ней заключается успокаивающий, разъясняющий и эстетический момент последней, и она же ясно указывает на историческое происхождение науки. Первоначально всякая экономия непосредственно направлена только на удовлетворение физических потребностей. Для ремесленника и еще более для исследователя кратчайшее, простейшее, достижимое с наименьшими духовными жертвами познание определенной области процессов природы само становится экономической целью. Хотя оно первоначально было средством к цели, тем не менее, раз соответствующие духовные склонности развились и требуют удовлетворения, познание становится целью, пред лицом которой о физической потребности совсем более не думается.

Итак, задача естествознания — отыскать то, что в процессах природы остается равным себе, т. е. элементы их и род их связи, их зависимости друг от друга. Оно стремится обобщенным и полным описанием сделать ненужным выжидание новых данных опыта, сэкономить их; так, например, благодаря познанной взаимной зависимости процессов друг от друга становится ненужным при наблюдении одного процесса наблюдение другого, который определяется уже вместе с первым. Далее, можно сэкономить работу и при самом описании, отыскивая методы, при помощи которых можно было бы сразу и кратчайшим путем описать возможно больше. Все это невозможно вполне объяснить в общих выражениях и при рассмотрении частностей станет гораздо яснее. Тем не менее, будет целесообразно и здесь уже указать на важнейшие точки зрения.

7. Перейдем теперь ближе к нашему предмету. Не делая главным содержанием своего изложения историю механики, мы будем остана-

вливаться все же на ее историческом развитии настолько, насколько это будет необходимо для понимания современного состояния механики и не повредит связи целого. Не говоря уже о том, что нам не следует уклоняться от могучих идейных толчков, которые мы можем получить от самых выдающихся людей всех времен и которые, вместе взятые, и гораздо плодотворнее, чем влияние лучших людей нашего времени, нет более великолепной, эстетически более прекрасной картины, чем проявления огромной духовной силы исследователей, положивших основы нашей науки. Без всяких еще методов, созданных лишь именно их работой, да и непонятных без знакомства с этой последней, они овладевают своим материалом и отпечатлевают на нем логические формы. Человек, знакомый со всем ходом научного развития, будет естественно гораздо свободнее и правильнее судить о значении какого-нибудь современного научного движения, чем тот, который, будучи ограничен в своем суждении пределами им самим пережитого промежутка времени, наблюдает только современное ему направление движения.

Глава I
Развитие принципов статики

1. Принцип рычага

1. Древнейшие исследования по механике, о которых дошли до нас известия, исследования древних греков, касались статики, учения о равновесии. После завоевания Константинополя турками (1453), когда бежавшие греки с захваченными древними сочинениями своими дали новые толчки науке на Западе, самые выдающиеся исследователи тоже занимались — главным образом под влиянием сочинений Архимеда — исследованиями по статике.

Исследования по механике появляются у греков вообще поздно и успехи здесь уступают великим успехам этого народа в математике и в особенности в геометрии.

Известия о механике, поскольку они касаются более древних греческих исследователей, крайне скудны. Архит, пользовавшийся уважением гражданин Тарента (около 400 г. до н. э.), прославился, как геометр, занимался знаменитой проблемой удвоения куба и конструировал механические приспособления для описания различных кривых. Как астроном, он познал шаровидную форму Земли и суточное вращение ее около своей оси. Как механик он — основатель учения о блоках. Утверждают, что в особом сочинении по механике он применял к этой науке геометрию, но о подробностях относительно этого у нас нет никаких ближайших известий. От Авла Геллия (X, 12) мы знаем, что Архит построил из дерева возбудивший изумление автомат, а именно летающего голубя, которого он, вероятно, приводил в движение сжатым воздухом. Характерно именно для доисторической эпохи механики то, что, с одной стороны, обращали внимание на практическое ее значение, а с другой — хлопотали над конструкцией автоматов, которые могли бы возбуждать изумление в непосвященных людях.

Гораздо позже еще при Ктезибии (285–247 до н. э.) и Героне (1 век н. э.) существенных изменений в этом положении не произошло. Возродилось также это явление в эпоху упадка культуры в средние века. Искусственные автоматы с часовым механизмом, действие которых народное суеверие приписывало содействию дьявола, общеизвест-

ны. Подражая внешней форме жизни, надеялись изучить внутреннюю ее сторону. В связи с этим неправильным воззрением на жизнь находится затем и удивительная вера в возможность perpetuum mobile. Только постепенно, медленно и в неясной форме стали всплывать перед умственным взором мыслителей истинные проблемы механики. Характерно в этом отношении сочинение Аристотеля (384–322 до н. э.) «Проблемы механики». Аристотель умеет *распознавать* и *ставить* проблемы, он видит принцип параллелограмма *движения*, близко подходит к познанию центробежной силы, но в разрешении проблем удачи не имеет. Все сочинение носит скорее диалектический, чем естественнонаучный характер, и автор ограничивается только освещением *αποριαι*, затруднений, содержащихся в проблемах. Сочинение это, впрочем, прекрасно характеризует интеллектуальную ситуацию, знаменующую собой *начало* научного исследования.

«Чудесным кажется то, что, хотя происходит и естественно, но причина чего неизвестна... Таковы, например, случаи, когда меньшее осиливает большее, маленькая тяжесть поднимает большую; таковы между прочим все проблемы, которые мы называем механическими. К этого рода *αποριαι* принадлежат те, которые касаются рычага. Ибо несообразным кажется то, что большая тяжесть приводится в движение небольшой силой, причем та еще связана с большей еще тяжестью. Если кто не может привести в движение тяжести без рычага, приводить ее легко в движение, прибавив еще тяжесть рычага. Основная причина всего этого заключается в существе круга и притом — весьма естественна, ибо ничего нет несообразного в том, что из чудесного выходит что-нибудь чудесное. Самое же чудесное есть объединенная связь противоположных свойств. Круг же есть на самом деле такая связь. Он создается даже чем-нибудь движущимся и чем-нибудь, остающимся в покое».

Дальше в том же сочинении есть место, обнаруживающее предчувствие, в весьма неопределенной форме, принципа возможных перемещений.

Такие рассуждения означают признание и выставление проблемы, но далеко еще не ведут к ее разрешению.

2. Архимед из Сиракуз (287–212 до н. э.) оставил несколько сочинений, из которых некоторые вполне сохранились до нашего времени. Займемся сначала немного книгой «De aequiponderantibus», содержащей некоторые положения касательно рычага и центра тяжести.

Автор исходит из следующих допущений, которые он считает сами собой понятными:

a. Величины, равно тяжелые, действуя на равном расстоянии (от точки опоры), находятся в равновесии.

b. Величины, равно тяжелые, действуя на неравном расстоянии (от точки опоры), не находятся в равновесии, а та, которая действует на большем расстоянии, опускается.

Из этих предпосылок он делает следующий вывод:

«Соизмеримые величины находятся в равновесии, если расстояния их (от точки опоры) обратно пропорциональны».

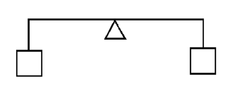


Рис. 2

Может показаться, что в этих предпосылках ничего более и анализировать нельзя; но если ближе присмотреться, это оказывается не так.

Представим себе стержень, тяжесть которого мы абстрагируем; он имеет точку опоры (рис. 2). На равном расстоянии от этой последней мы подвешиваем два равных груза. Что эти грузы в таком случае находятся в равновесии, есть предположение Архимеда. Можно было бы подумать, что это само собой понятно, независимо от всякого опыта (на основании так называемого принципа достаточного основания), что при симметрии всего прибора нет никакого основания, чтобы вращение происходило скорее в одном, чем в другом направлении. Но при этом забывают, что в предположении содержится уже куча отрицательных и положительных данных опыта. К отрицательным, например, относится то, что неравные цвета плеч рычага, положение наблюдателя, процесс, происходящий по соседству, и т. д. не имеют здесь никакого влияния; к положительным (как это показывает предположение 2) относится то, что равновесие зависит не только от грузов, но и от расстояний их от точки опоры, что те и другие определяют движение рычага. С помощью этих данных опыта, правда, не трудно усмотреть, что покой (но не движение) есть единственное движение, *однозначно* определенное условиями, от которых зависит движение[1].

Но мы только тогда можем считать наше знание *решающих* условий *достаточным*, когда они *однозначно* определяют процесс. При условии упомянутого выше опыта, что *решающее значение имеют только веса*

[1]Если, например, принять, что груз с правой руки опускается вниз, то тем же самым определяется противоположное вращение, когда не имеющий на процесс никакого влияния наблюдатель становится на противоположную сторону.

грузов и расстояния их от точки опоры, положение 1 Архимеда действительно имеет высокую степень очевидности и потому весьма пригодно в качестве основы для дальнейших исследований. Если наблюдатель сам становится в плоскости симметрии соответствующего аппарата, положение оказывается и весьма обязательной *инстинктивной* очевидностью, что зависит от симметрии собственного нашего тела. Отыскание таких положений есть также превосходное средство приучить себя к той же определенности в мыслях, какая обнаруживается в процессах природы.

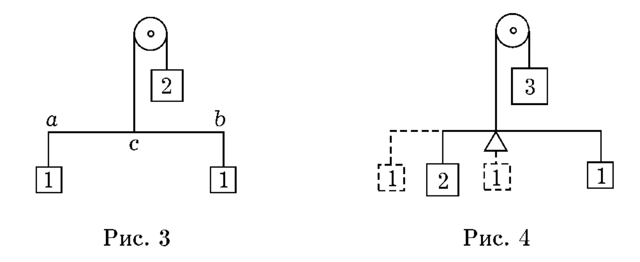


Рис. 3 Рис. 4

3. Попробуем теперь свободно воспроизвести ход мыслей, которыми Архимед пытался свести общий принцип рычага к специальному, будто бы само собой понятному. Подвешенные в a и b равные грузы (1) находятся в равновесии, когда стержень ab может вращаться около середины c. Если все подвесить на нитке в c, то к концу последней придется подвесить, если отвлечься от веса стержня, груз 2. Таким образом, равные грузы, подвешенные к концам стержня, замещают двойной груз в его середине.

К рычагу, плечи которого относятся, как 1 : 2, подвешивают грузы в отношении 2 : 1. Мы представляем себе груз 2 замещенным двумя грузами 1, которые оба подвешены на расстоянии 1 от точки привеса. Мы тогда опять имеем полную симметрию около точки привеса, а следовательно, и равновесие.

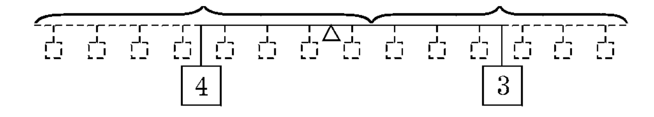


Рис. 5

К плечам рычага 3 и 4 подвешены грузы 4 и 3. Мы удлиняем плечо 3 на 4 и плечо 4 на 3, а грузы 4 и 3 заменяем соответственно четырьмя и тремя парами симметрично подвешенных грузов $^1/_2$, как это ясно изображено на рисунке. Мы тогда опять имеем полную симметрию. Это исследование, выполненное в специальных числах, легко можно обобщить.

4. Интересно видеть, каким образом точка зрения Архимеда была по примеру Стевина видоизменена Галилеем.

Галилей представляет себе горизонтальную однородную и тяжелую призму и той же длины однородный стержень (рис. 6), к которому на своих концах привешена призма. В середине своей стержень снабжен крючком. В этом случае существует равновесие, и это сейчас же и видно. Но *этот* же случай заключает в себе и ***всякий другой случай***. Галилей показывает это следующим образом. Допустим, что вся длина стержня или призмы равна $2(m+n)$. Разрежем призму надвое так, чтобы длина одной части была равна $2m$, а длина второй — $2n$. Это можно сделать, не нарушая равновесия, если предварительно прикрепить концы обеих частей у самого разреза нитками к стержню. Затем можно все нити и удалить, если предварительно подвесить обе призмы за середины их к стержню. Так как вся длина стержня равна $2(m+n)$, то каждая половина равна $(m+n)$. Поэтому расстояние точки привеса правой призмы от точки привеса стержня равна m, а левой равна n. Так легко убедиться на опыте, что важна не форма, а вес тел. Таким образом ясно, что равновесие существует еще и тогда, когда какой-нибудь груз величиной в $2m$ подвешен на одной стороне на расстоянии n и какой-нибудь груз величиной в $2n$ подвешен на другой стороне на расстоянии m. В этом выводе инстинктивные элементы познания выступают еще больше, чем в выводе Архимеда.

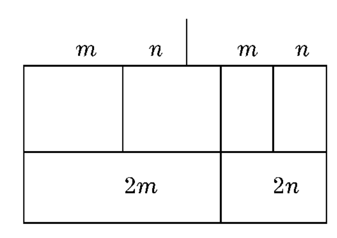


Рис. 6

В этом прекрасном исследовании замечается еще, впрочем, остаток тяжеловесности, особенно свойственной исследователям древности.

Как физик новейшего времени исследовал тот же вопрос, можно видеть из следующих рассуждений Лагранжа. Мы представляем себе однородную горизонтальную призму, подвешенную посредине. Эту призму мы представляем себе разделенной на две части, длиной в $2m$

и $2n$. Центры тяжести S этих частей, в которых мы можем представлять себе грузы, пропорциональные $2m$ и $2n$, находятся на расстоянии n и m от точки опоры. Такой краткий вывод возможен только для ума, привычного к математическому воззрению.

5. Цель, которую ставили себе Архимед и последующие исследователи в приведенных исследованиях, заключается в том, чтобы свести более сложный случай рычага к более простому, как будто бы само собою понятному, *усмотреть* в более сложном случае более простой или также наоборот. И действительно, мы считаем процесс объясненным, когда нам удается усмотреть в нем известные, более простые процессы.

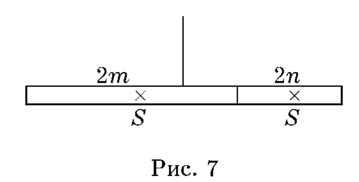


Рис. 7

Хотя результаты, полученные Архимедом и последующими исследователями, с первого взгляда и кажутся чрезвычайно поразительными, тем не менее у нас возникают при более точном рассмотрении сомнения в их правильности. Из одного допущения равновесия равных грузов на равных расстояниях выводится обратная пропорциональность между грузом и плечом рычага! Как же это возможно? (См. приложение, добавление 1.)

Раз уже одну голую зависимость равновесия от груза и расстояния вообще невозможно было *измыслить* из себя, а необходимо было заимствовать из опыта, то тем менее нам удастся найти спекулятивным путем форму этой зависимости, пропорциональность.

И действительно, и Архимед и все последующие исследователи более или менее скрыто или молча вводят допущение, что (нарушающее равновесие) действие груза P на расстоянии L от оси измеряется произведением $P \cdot L$ (так называемый статический момент). Прежде всего ясно, что при вполне симметрическом устройств равновесие существует при условии *какой-либо* произвольной зависимости нарушающего равновесие момента от L, т.е. $Pf(L)$; поэтому из этого равновесия *не может быть* выведена определенная форма PL. Ошибка вывода должна, следовательно, заключаться в предпринятом преобразовании, и действительно в нем заключается. Действие двух равных грузов при всех условиях Архимед предполагает равным действию двойного груза с точкой привеса посередине. Но так как ему знакомо влияние расстояния от точки вращения, и он из этого влияния исходит, то этого не следует принимать заранее, раз оба груза не находятся на равном

расстоянии от точки вращения. Если же груз, лежащий сбоку от точки вращения, разделяется на две равные части, перемещаемые симметрично относительно первоначальной точки привеса, то один груз настолько *приближается* к точки вращения, насколько другой от нее *отдаляется*. Если же принимают, что действие при этом остается тем же самым, то этим уже решается вопрос о форме зависимости момента от L, ибо это возможно только при форме PL, при *пропорциональности* к L. Но тогда всякий дальнейший вывод излишен. Весь вывод содержит в себе, хотя и в неясно выраженной форме, в виде допущения, то именно положение, которое нужно доказать.

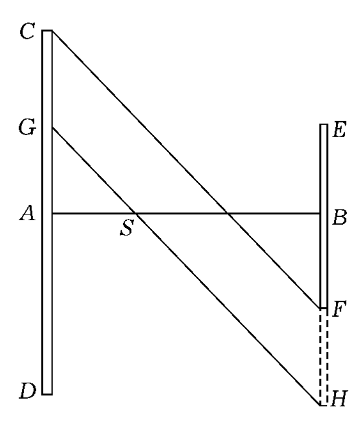


Рис. 8

6. Гюйгенсу этот вывод не нравился, хотя он, по-видимому, и не сознавал ясно ошибки его, и он дал ему другую форму, в которой, как ему кажется, ошибка избегнута. Обратимся к выводу Лагранжа и представим себе, что обе призмы повернуты на угол в 90° около вертикальных осей, проходящих через их центры тяжести s, s' (рис. 8a). Докажем, что равновесие при этом сохраняется, и мы получим вывод Гюйгенса. В сокращенном и упрощенном виде он сводится к следующему. В твердой, невесомой плоскости (рис. 8) мы проводим через точку S прямую, на которой мы в A и B отрезаем с одной стороны длину 1, а с другой — длину 2. В точках A и B этой прямой мы помещаем перпендикулярно к ней, их серединами, однородные тонкие тяжелые призмы CD и EF, длины и веса которых соответственно равны 4 и 2. Если мы проведем прямую HSG (причем $AG = {}^1\!/_2 AC$) и параллельную к ней прямую CF и передвинем часть призмы CG параллельным смещением в FH, то симметрия около оси GH станет очевидной. Но в равновесии находятся и призмы CD, EF около оси AB. Следовательно, равновесие существует для каждой оси, проходящей через S, а следовательно, и для оси, перпендикулярной к AB, чем и дан новый случай рычага.

Здесь как будто не предполагается ничего более, кроме того, что равные грузы p, p (рис. 9) в одной плоскости и на равных расстояниях l, l от оси AA' (в этой плоскости) уравновешивают друг друга.

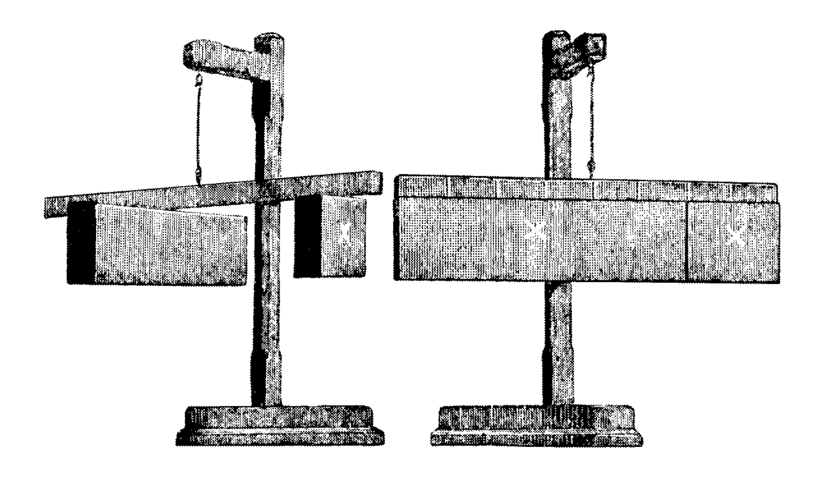


Рис. 8а

Если стать в плоскости, проходящей через AA' перпендикулярно к l, l, например, в точке M, и посмотреть один раз к A, а потом к A', мы признаем за этим принципом ту же очевидность, какую мы признали за принципом 1 Архимеда. Дело не меняется, если перемещать грузы параллельно к оси, что Гюйгенс и делает.

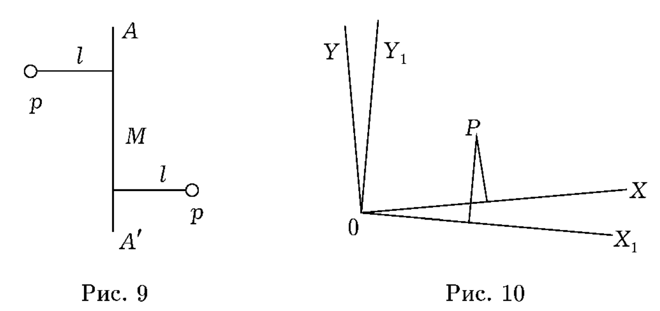


Рис. 9 Рис. 10

Ошибка появляется лишь в заключении: если существует равновесие для двух осей плоскости, то оно существует и для каждой другой оси, проведенной через точку их пересечения. Это заключение (если оно не чисто инстинктивное) может быть сделано только тогда, когда грузам приписываются нарушающие действия, *пропорциональные* их расстояниям от оси. Но здесь лежит *ядро* учения о рычаге и центре тяжести.

Отнесем тяжелые точки какой-нибудь плоскости к прямоугольной системе координат (рис. 10). Координаты центра тяжести системы масс m, m', m'', ... с координатами x, x', x'', ... , y, y', y'', ..., как известно, таковы:

$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \eta = \frac{\sum my}{\sum m}.$$

Если мы повернем систему координат на угол α, то новые координаты масс будут:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad y' = y\cos\alpha + x\sin\alpha,$$

а, следовательно, координаты центра тяжести

$$\xi_1 = \frac{\sum m(x\cos\alpha - y\sin\alpha)}{\sum m} = \cos\alpha\frac{\sum mx}{\sum m} - \sin\alpha\frac{\sum my}{\sum m} = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha$$

и аналогично

$$\eta_1 = \eta\cos\alpha + \xi\sin\alpha.$$

Таким образом, мы получаем координаты нового центра тяжести, просто трансформируя координаты прежнего на новые оси. Центр тяжести остается, следовательно, в той же точке. Если поместить начало координат в центр тяжести, то получается $\sum mx = \sum my = 0$. При вращении системы осей это отношение сохраняется. Поэтому, если равновесие существует для двух перпендикулярных друг к другу осей плоскости, то оно существует также и только тогда и существует для каждой другой оси, проведенной через точку пересечения. Отсюда следует, что если равновесие существует для каких-нибудь двух осей плоскости, то оно существует и для каждой другой оси, проходящей через точку пересечения.

Но все эти выводы оказываются невозможными, если координаты центра тяжести определяются другим *более общим* уравнением, как например:

$$\xi = \frac{mf(x) + m'f(x') + m''f(x'') + \cdots}{m + m' + m'' + \cdots}.$$

Вывод Гюйгенса, следовательно, неприемлем и содержит ту же ошибку, которую мы заметили и у Архимеда.

В своем стремлении свести более сложный случай рычага к случаю инстинктивно усматриваемому Архимед, вероятно, был введен

в заблуждение тем, что он непроизвольно пользовался *исследованиями* о центре тяжести, *сделанными с помощью принципа, подлежащего доказательству.* Характерно то, что он не доверяет ни себе, ни, может быть, другим, в случае легко напрашивающегося замечания относительно значения произведения $P \cdot L$ и ищет дальнейшего обоснования.

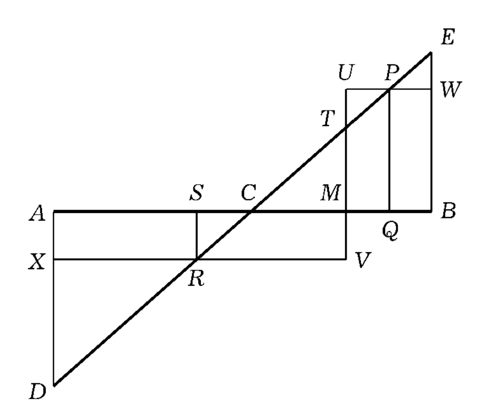


Рис. 11

В действительности же невозможно достичь, по крайней мере, на этой ступени, понимания рычага, если не *усматривают* в процессах того, что при нарушении равновесия решающее значение имеет произведение $P \cdot L$. Поскольку Архимед, в своей чисто греческой жажде доказательств, надеется это обойти — его выводы ошибочны. Но если рассматривают и значение $P \cdot L$, как данное, то выводы Архимеда сохраняют еще значительную ценность, поскольку формы понимания различных случаев опираются друг на друга, поскольку оказывается, что один простой случай содержит в себе все другие, поскольку одно и то же рассмотрение принимается для всех случаев. Представим себе однородную призму, ось которой AB (рис. 11) подперта в ее середине C. Чтобы наглядно изобразить определяющую нарушение равновесия сумму произведений грузов на расстояния, мы на элементах оси, пропорциональных элементам грузов, отнесем соответствующие расстояния в виде ординат, причем справа от C отнесем ординату вверх (как величину положительную), а слева от C — вниз (как величину отрицательную). Сумма площадей обоих треугольников $ACD + CBE = 0$ наглядно представляет нам существование равновесия. Разделим приз-

му в точке M на две части, и мы можем тогда $MTEB$ заменить прямоугольником $MUWB$, а $TMCAD$ — прямоугольником $MVXA$, причем $TP = \frac{1}{2}TE$ и $TR = \frac{1}{2}TD$, а части призмы MB, MA следует представить себе повернутыми около точек Q и S перпендикулярно к AB. (См. приложение, добавление 1.)

В указанном здесь направлении способ рассмотрения Архимеда, без сомнения, оказался еще полезным, так как никто уже не высказывал сомнения в значении произведения $P \cdot L$ и мнение об этом установилось уже исторически и после многократной проверки.

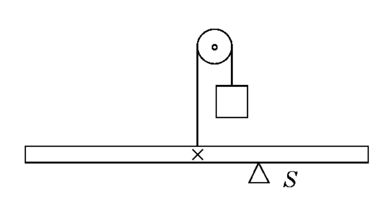


Рис. 12

Эксперименты никогда не бывают вполне точны, но могут ***навести на мысль***, что в точном измерительном понятии $P \cdot L$ следует искать ключ к объяснению связи всех фактов. И действительно, только таким образом становятся лишь понятными все выводы Архимеда, Галилея и др. Теперь можно с полной уверенностью предпринять необходимые преобразования, как растяжение и сжатие призм. Какую-нибудь подвешенную посередине призму (рис. 12) можно *где-нибудь* разрезать, не нарушая равновесия, и несколько таких призм можно прочно связать в новые как будто бы случаи равновесия. Обращение, разделение случая равновесия на несколько других (Галилей) возможно только при условии соблюдения значений $P \cdot L$. В весьма симпатичном для меня сочинении «Denken und Anschauung in der Geometrie» (1900) O. Hölder защищает от моей критики правильность выводов Архимеда. Хотя наши взгляды на точную науку и ее основы во многом совпадают, что доставляет мне большое удовольствие, я, тем не менее, в данном случае согласиться с ним не могу. Можно было бы подумать, что Архимед (относительно равновесия плоскостей 1) считает ***фактом общего значения***, что два равных груза могут быть замещены *при всех условиях* двойным грузом посередине (положение 5, следствие 2). Тогда весь вывод его (положение 6) был бы не нужен, ибо искомый результат сейчас же отсюда вытекает (см. стр. 22). Этому взгляду противоречит способ выражения Архимеда. Но a priori ясным такое положение, без сомнения, признать нельзя. Остается, мне кажется, только взгляд, изложенный на стр. 22.

7. Весьма интересно и поучительно, как законы рычага, в простой форме унаследованные нами от Архимеда, обобщались и раз-

вивались далее современными физиками. Первым ученым, познавшим важность общего понятия, так называемого, статического момента, был, по-видимому, знаменитый художник и исследователь Леонардо да Винчи (1452–1519). Доказывают это некоторые места в оставшихся после него рукописях. Он говорит, например: «Возьмем вращающийся около точки A стержень AD с привешенным грузом P и веревкой, переброшенной через блок, с другим грузом Q (рис. 13). Какое отношение должно быть между силами, чтобы существовало равновесие? Плечо рычага для груза P не есть AD, а есть *«потенциальный»* рычаг AB. Плечо рычага для груза Q не есть AD, а *«потенциальный»* рычаг есть здесь AC». Каким образом он пришел к этому взгляду, правда, трудно сказать, но ясно, что он знал, чем определяется действие грузов.

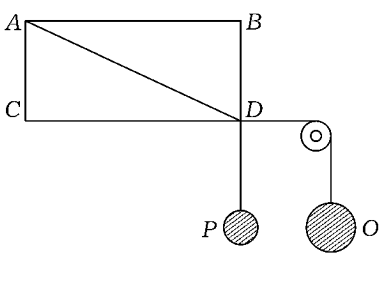


Рис. 13

Подобные же рассуждения, как у Леонарда да Винчи, мы находим и у Гвидо Убальди.

8. Попробуем выяснить себе, каким образом можно было бы прийти к понятию статического момента, под которым понимается, как известно, произведение силы на перпендикуляр, опущенный от оси на ее направление, хотя и трудно в настоящее время вполне установить путь, приведший к этому понятию. Что равновесие существует, когда веревка, переброшенная через блок, с обеих сторон натягивается с равной силой, усмотреть не трудно. Всегда можно найти плоскость симметрии всего аппарата, т. е. плоскость, перпендикулярную к плоскости веревки и делящую угол, образуемый веревкой, пополам (EE). Движение, которое могло бы еще здесь наступить, не поддается однозначному определению никаким правилом, и оно, следовательно, и не наступает. Если далее заметить, что материал блока лишь постольку имеет существенное значение, поскольку он определяет степень подвижности точек приложения веревки, то нетрудно уви-

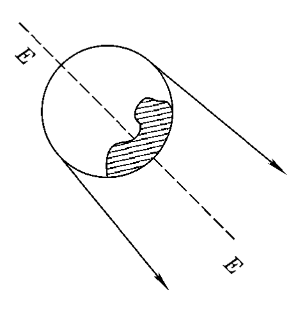


Рис. 14

деть, что значительная часть блока может и отсутствовать, не нарушая равновесия. Существенное значение остается только за неподвижными радиусами, ведущими к точкам касания веревки. Таким образом становится ясно, что неподвижные радиусы (или перпендикуляры к направлениям веревки) играют здесь подобную же роль, какую играют плечи рычага в рычаге Архимеда.

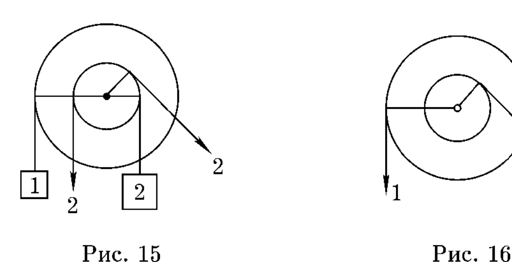


Рис. 15 Рис. 16

Рассмотрим так называемый ворот. Пусть радиус колеса равен 2 и груз, приложенный к нему, равен 1, а радиус вала равен 1 и груз, приложенный к нему, равен 2. Этот ворот вполне соответствует рычагу Архимеда. Если мы наложим на вал каким-нибудь образом еще одну веревку, натягиваемую с обеих сторон грузами 2, равновесие не нарушится. Но ясно, что мы можем рассматривать, как уравновешивающие друг друга, натяжения, обозначенные на рис. 16, не принимая во внимание остальных двух, как взаимно компенсирующихся. Этим мы, оставляя в стороне все несущественное, пришли к тому выводу, что движение определяется не только натяжениями грузов, но и перпендикулярами, опущенными на направления их от точки вращения. Определяющее значение имеют произведения грузов на перпендикуляры, опущенные от оси на направления натяжений, т. е., так называемые, статические моменты.

9. До сих пор мы рассматривали развитие познания принципа рычага. Совершенно независимо развивалось познание принципа наклонной плоскости. Но для понимания машин вовсе нет надобности в новом принципе, кроме принципа рычага, так как последний вполне достаточен. Галилей, например, следующим образом объясняет наклонную плоскость при помощи принципа рычага. Рассмотрим наклонную плоскость и на ней груз Q, удерживаемый в равновесии грузом P (рис. 17). Галилей дает понять, что важно не то, чтобы груз Q лежал именно на наклонной плоскости, а род движения этого груза.

Можно поэтому представлять себе, что этот груз находится на перпендикулярном к плоскости стержне AC, вращающемся около точки C; если предпринять тогда только очень небольшое вращение, то наш груз будет двигаться в элементе дуги, совпадающем с наклонной плоскостью. То, что путь движения при дальнейшем его продолжении есть кривая, не имеет здесь значения, так как в случае равновесия это дальнейшее движение в действительности не происходит и важно только мгновенное движение. Если же принять во внимание изложенное выше замечание Леонардо да Винчи, легко убедиться в правильности того, что $Q \cdot CB = P \cdot CA$, $\frac{Q}{P} = \frac{CA}{CB} = \frac{ca}{cb}$, а следовательно, и найти закон равновесия наклонной плоскости. Итак, зная принцип рычага, легко им воспользоваться для познания других машин.

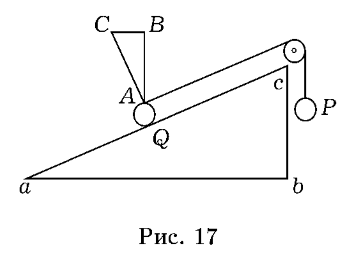
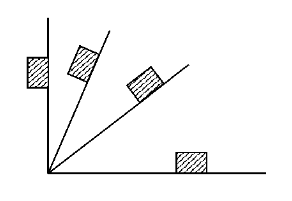


Рис. 17

2. Принцип наклонной плоскости

1. Стевин (1548–1620) первый исследовал механические свойства наклонной плоскости и притом вполне оригинальным образом. Когда какой-нибудь груз лежит на горизонтальной плоскости стола, то, так как давление его перпендикулярно к этой плоскости, существование равновесия очевидно на основании многократно примененного уже принципа симметрии. На вертикальной же стене груз не встречает *никакой* помехи в своем движении падения. Наклонная плоскость, следовательно, будет представлять средний случай между этими двумя крайними случаями. Здесь равновесие не будет существовать само по себе, как на горизонтальной подставке, но и сможет быть удержано при помощи меньшего противовеса, чем на вертикальной стене. При отыскании существующего здесь статического закона древние исследователи наталкивались на значительные затруднения.


Рис. 18

Стевин рассуждает следующим образом. Он представляет себе трехгранную призму с горизонтальными ребрами, разрез которой ABC изображен на рис. 19. Он принимает, например, что $AB = 2BC$ и сто-

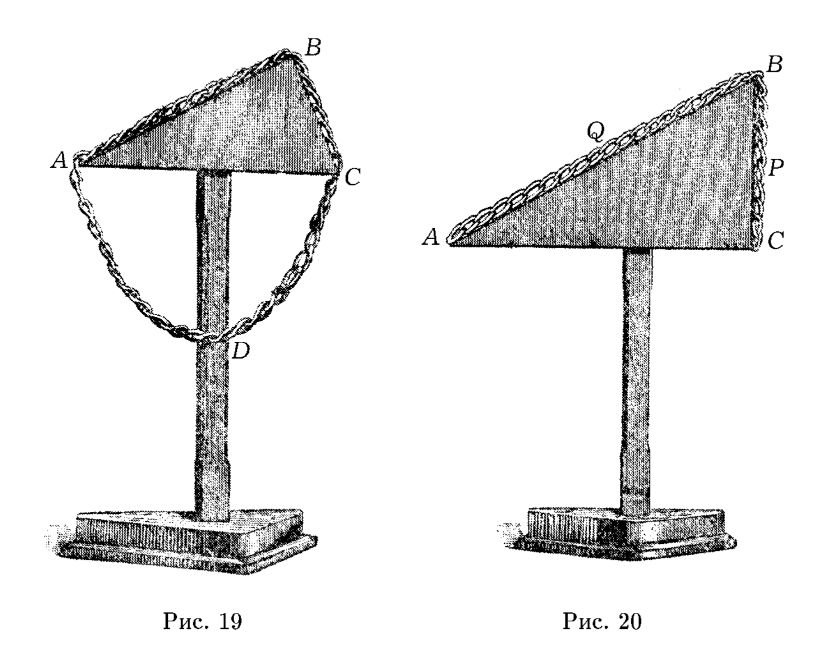


Рис. 19 Рис. 20

рона AC горизонтальна. На эту призму он накладывает замкнутую веревку с четырнадцатью шарами равного веса и на равном друг от друга расстоянии. Вместо веревки удобно взять замкнутую равномерную цепь. Последняя или будет в равновесии, или нет. Если допустить последнее, то цепь, *раз* придя в движение, должна была бы оставаться в движении вечно, ибо при ее движении условия не изменяются. Должно было бы получиться perpetuum mobile, что Стевин считает абсурдом. Мыслим поэтому только первый случай. Цепь остается в равновесии. В таком случае симметрическая часть цепи ADC может быть удалена без нарушения равновесия. Следовательно, часть цепи AB уравновешивает часть BC. Таким образом, на наклонных плоскостях равной высоты действия равных грузов обратно пропорциональны длинам этих плоскостей.

Если в разрезе призмы, изображенном на рис. 20, сторона AC горизонтальна, сторона BC вертикальна, $AB = 2BC$ и пропорциональные длинам веса отрезков цепи на AB и BC суть Q и P, то $\frac{Q}{P} = \frac{AB}{BC} = 2$. Обобщение этого случая ясно само собой.

2. Допущение, из которого исходит Стевин, а именно, что замкнутая цепь остается в покое, скрывает в себе, без сомнения, сначала только *вполне инстинктивное* познание. Он сейчас же чувствует, да и мы вместе с ним, что ничего, подобного такого рода движению, мы не наблюдали, не видели, что такого движения не бывает. Это убеждение обладает такой *логической силой*, что мы без возражения принимаем делаемый отсюда вывод относительно закона равновесия наклонной плоскости, а между тем, как голый результат опыта или полученный каким-нибудь другим образом, этот закон возбудил бы в нас сомнение. Мы не найдем в этом ничего удивительного, если примем во внимание, что каждый результат опыта затемняется обстоятельствами посторонними (трением) и что каждое предположение о решающих дело условиях несвободно от ошибок. То обстоятельство, что Стевин признает за таким инстинктивным познанием высший авторитет, чем за своим простым, ясным, прямым наблюдением, могло бы нас привести в изумление, если бы мы не чувствовали того же. Возникает поэтому вопрос: откуда же этот высший авторитет? Если мы вспомним, что научное доказательство, вся научная критика могла вытекать только из познания собственных ошибок исследователей, то ответить на этот вопрос будет не трудно. Мы ясно чувствуем, что *сами* мы *ничего* не сделали для образования этого инстинктивного познания, что мы ничего произвольно в него не вложили, а оно образовалось совершенно без *нашего* содействия. Поэтому отпадает недоверие наше к собственному субъективному пониманию наблюдаемого.

Вывод Стевина есть один из наиболее ценных образцовых выводов в первоначальной истории механики и бросает удивительный свет на процесс развития науки, на происхождение ее из инстинктивно приобретенных познаний. Вспомним, что Архимед развивал вполне ту же тенденцию, что и Стевин, но только с гораздо меньшим успехом. Да и впоследствии инстинктивные познания не раз становились исходным пунктом исследований. Каждый экспериментатор может на себе самом ежедневно наблюдать, как он руководится инстинктивными познаниями. Удается ему логически формулировать то, что в них содержится, и он обыкновенно делает значительный шаг вперед.

Рассуждения Стевина не содержат ошибки. Будь в них ошибка, мы все разделяли бы ее. Более того, нет никакого сомнения, что только сочетание сильнейшего инстинкта с величайшей силой логической мысли рождает великого естествоиспытателя. Отсюда однако никоим образом

не следует, что мы должны из инстинктивного в науке создать себе новую мистику и считать ее непогрешимой. Что это было бы неправильно, убедиться весьма легко. Даже инстинктивные познания столь великой логической силы, как принцип симметрии, примененный Архимедом, могут ввести в заблуждение. Найдутся, может быть, читатели, которые вспомнят, как было нарушено их душевное равновесие, когда они в первый раз услышали, что лежащая в магнитном меридиане магнитная игла параллельным ей и проходящим над ней электрическим током отклоняется в определенном направлении *из* плоскости меридиана. Инстинктивное столь же погрешимо, как и ясно сознаваемое. Оно имеет ценность прежде всего только в области, с которой человек хорошо знаком.

Вместо того чтобы заниматься мистикой, зададимся лучше вопросом: как возникают инстинктивные познания и что в них содержится? То, что мы наблюдаем в природе, запечатлевается, хотя бы и *непонятое* и *неанализированное*, в наших представлениях, которые и воспроизводят в самых общих и сильнейших чертах процессы природы. Мы обладаем поэтому в этих данных опыта богатством, которое всегда под рукой и которого только очень небольшая часть содержится в наших ясно сознаваемых идеях. То обстоятельство, что нам легче использовать этот опыт, чем природу самолично, и что он, в указанном выше смысле, свободен от субъективности, придает ему большую ценность. Уже такова особенность инстинктивного познания, что оно преимущественно бывает отрицательного характера. Мы можем сказать не столько то, что должно произойти, сколько скорее то только, что не может произойти, так как только последнее стоит в резком противоречии к той неясной массе данных опыта, в которой отдельные элементы не различаются.

Приписывая большую эвристическую ценность инстинктивным познаниям, мы с нашей точки зрения тем не менее не должны останавливаться на признании их авторитета. Напротив, мы должны задаться следующим вопросом: при каких условиях могло возникнуть данное инстинктивное познание? Обыкновенно мы тогда находим, что *тот же* принцип, для обоснования которого мы привлекли инстинктивное познание, образует опять *основное условие* для возникновения этого познания. И это совершенно не вредно. Инстинктивное познание приводит нас к принципу, которым оно само объясняется и который в существовании этого познания, представляющем само по себе факт,

опять находит подтверждение. И так обстоит дело, если ближе присмотреться, в случае Стевина.

3. Исследование Стевина кажется нам столь гениальным потому, что результат, к которому он приходит, содержит как будто больше той предпосылки, из которой он исходит. В то время как с одной стороны мы должны признать результат, во избежание противоречий, у нас с другой стороны остается нечто, побуждающее нас стремиться к дальнейшему познанию. Если бы Стевин выяснил весь факт со всех сторон, как это впоследствии сделал Галилей, его рассуждения не казались бы нам столь гениальными, но мы зато получили бы объяснение, гораздо более ясное и более удовлетворяющее нас. В замкнутой цепи, не скользящей на призме, в действительности содержится уже все. Мы могли бы сказать, что цепь не скользит потому, что при этом не происходит опускание тяжелых тел. Это было бы неточно, ибо в действительности некоторые звенья цепи опускаются при ее движении, а другие взамен того поднимаются. Точнее поэтому сказать так: цепь не скользит потому, что каждому телу, которое могло бы опускаться, должно было бы соответствовать тело равного веса, поднимающееся на ту же высоту, или тело двойного веса, поднимающееся на половину высоты и т. д. Это отношение было знакомо Стевину, и он изложил и описал его также в своем учении о блоках. Но он, очевидно, слишком не доверял себе, чтобы без дальнейших доказательств представить закон этот обязательным и для наклонной плоскости. Но если бы такой закон не имел общего значения, инстинктивное познание относительно замкнутой цепи совсем и возникнуть не могло бы. Этим объясняется все. То, что Стевин не пошел так далеко в своих рассуждениях, а удовлетворился только установлением согласия между своими (косвенно найденными) понятиями и своим инстинктивным мышлением, нас смущать не должно.

Можно случай Стевина объяснить еще несколько иным образом. Если для инстинкта твердо установлено, что замкнутая тяжелая цепь не вращается, то отдельные простые, количественно легко обозреваемые случаи наклонной плоскости, которые придумывает Стевин, следует рассматривать, как отдельные специальные данные опыта. Ибо вовсе не важно, осуществлен ли эксперимент в действительности или нет, если только результат его вне сомнения. Стевин именно и экспериментирует в мыслях. Из соответствующих физических эксперимен-

тов с наивозможно более исключенным трением действительно можно было бы вывести результат Стевина. Аналогичным образом рассуждение Архимеда о рычаге может быть понято в форме Галилея. Если бы ряд воображаемых, мысленных экспериментов был осуществлен физически, можно было бы отсюда вывести со строжайшей точностью линейную зависимость момента от длины плеча рычага. Таких попыток приспособления количественных специальных точек зрения к общим инстинктивным впечатлениям мы в области механики встретим еще не мало примеров у самых выдающихся исследователей. Встречаются такие явления и в других областях. В этом отношении я мог бы сослаться на мою книгу «Principien der Wärmelehre» («Принципы учения о теплоте»), стр. 151. Можно сказать, что самые выдающиеся, самые важные шаги на пути развития науки сделаны именно таким образом. Метод великих исследователей, заключавшийся в установлении согласия между отдельными представлениями с одной стороны и общей картиной какой-нибудь области явлений — с другой, их постоянное внимание к целому при изучении единичного, должно быть признано истинным философским методом. Истинная философская работа в области какой-нибудь специальной науки будет всегда заключаться в установлении связи и согласия между ее результатами и твердо установленными общими нашими познаниями. Тогда совершенно отпадают как туманное измышление философии, так и всякие неудачные, нелепые специальные теории.

Будет небесполезно еще раз рассмотреть общие и различные черты в ходе идей Стевина и Архимеда. И тот и другой исходят из инстинктивного. Но Стевин пришел к весьма общему познанию, что легко подвижная тяжелая замкнутая цепь произвольной формы остается в покое. Отсюда он без труда может прийти к количественно легко обозримым специальным случаям. Напротив того, случай, из которого исходит Архимед, есть *самый специальный*, который можно только себе представить. Из него он никоим образом не может вывести случая *более общего* так, чтобы его выводы были вне сомнения. Если это ему как будто удается, то происходит это оттого, что он случай этот уже знает. Другое дело Стевин: он искомое, без сомнения, тоже уже знает, по крайней мере, приблизительно, но тем путем, которым он идет, он мог бы найти его и прямо. Если таким путем снова открывается статическое отношение, то оно имеет *высшую* ценность, чем результат измерительного эксперимента, всегда несколько уклоняющийся от такого соотно-

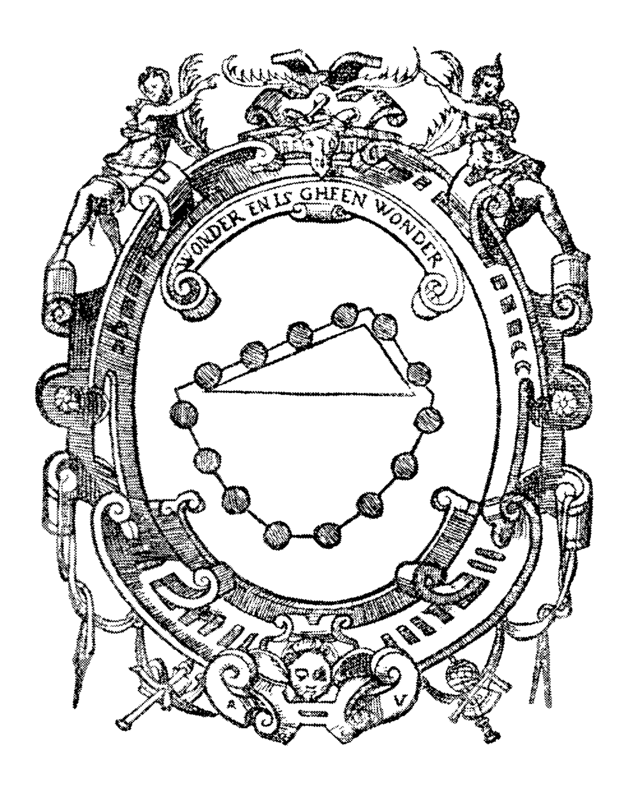


Рис. 21

шения. Но это отклонение возрастает вместе с искажающими результат вредными условиями, как трение и т. д., и вместе с ними уменьшается. Точные статические соотношения получаются *идеализацией* и *абстракцией* искажающих результат условий. В методах Архимеда и Стевина это соотношение представляется как *гипотеза*, с отказом от которой все отдельные факты опыта тотчас пришли бы в логическое противоречие. Но ведь только оперируя точными понятиями, мы можем произвольно воссоздавать факты, научно, логически овладеть ими. Рычаг и наклонная плоскость суть именно такие произвольно созданные, идеальные объекты механики, как треугольники идеальные объекты геометрии. Одни эти объекты могут вполне удовлетворить тем логическим требованиям, которые мы им предъявили. Физический рычаг удовлетворяет этим требованиям лишь постольку, поскольку он приближается к иде-

альному. Естествоиспытатель стремится *приспособить свои идеалы* к действительности. (См. приложение, добавление 1.)

Итак, служба, которую сослужил себе и своим читателям Стевин, заключается в том, что он противопоставляет друг другу различные, частью инстинктивные, частью ясные познания, устанавливает связь и согласие между ними, подтверждает одни другими. Но какую опору своим воззрениям Стевин нашел в этом методе, можно видеть из того обстоятельства, что изображение замкнутой цепи на призме он избрал в качестве виньетки для своего сочинения («Hypomnemata mathematica», Leyden, 1605), снабдив ее надписью: «Wonder en is gheen wouder» («Чудо не есть чудо»). И действительно, каждый шаг вперед в науке, выясняющий что-нибудь, бывает всегда связан с известным чувством разочарования. Мы узнаем, что то, что кажется нам чудесным, не более чудесно, чем другое, что мы знаем инстинктивно и считаем само собой понятным, и более того, что противоположное было бы гораздо более чудесно и что везде выражается *один и тот же* факт. Оказывается тогда, что наша проблема совсем не проблема, она расплывается, как дым, отходя в тень истории.

4. Раз был установлен принцип наклонной плоскости, Стевину было не трудно применить его и к остальным машинам и тем выяснить их. Дает он ему, например, и следующее применение.

Пусть мы имеем наклонную плоскость и на ней груз Q. При помощи веревки, переброшенной через блок A, этот груз Q уравновешивается грузом P. Путь, которым идет здесь Стевин, схож с тем, которым впоследствии шел Галилей. Он замечает, что вовсе не необходимо, чтобы груз Q лежал на наклонной плоскости. Раз только сохраняется род его движения, то и отношение между силой и грузом остается тем же самым. Поэтому мы можем представить себе наш груз приложенным к веревке, переброшенной через блок D и соответствующим образом нагруженным; эта веревка должна быть перпендикулярна к наклонной плоскости. Сделав все это, мы получаем собственно, так называемую, веревочную машину. Мы видим, что теперь очень легко определить ту часть груза, с которой тело стремится по наклонной плоскости вниз. Чтобы найти ее, достаточно

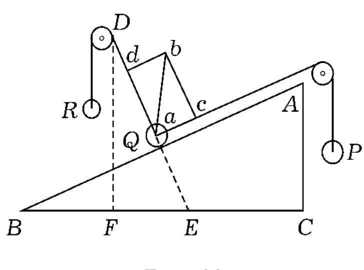


Рис. 22

провести вертикальную линию и на ней отложить соответствующей грузу Q отрезок ab. Если теперь на отрезок aA опустить перпендикуляр bc, мы получим $\frac{P}{Q} = \frac{AC}{AB} = \frac{ac}{ab}$; ac изображает, следовательно, напряжение веревки aA. Теперь ничто нам не мешает мысленно приписать функцию одной веревки другой, а груз Q представлять себе лежащим на (пунктиром начерченной) наклонной плоскости EDF. Мы тогда находим аналогично, что ad изображает напряжение R второй веревки. Таким образом Стевин косвенным путем приходит к познанию статического отношения веревочной машины и так называемого параллелограмма сил, правда, сначала только для специального случая перпендикулярных друг к другу веревок (или сил) ac, ad.

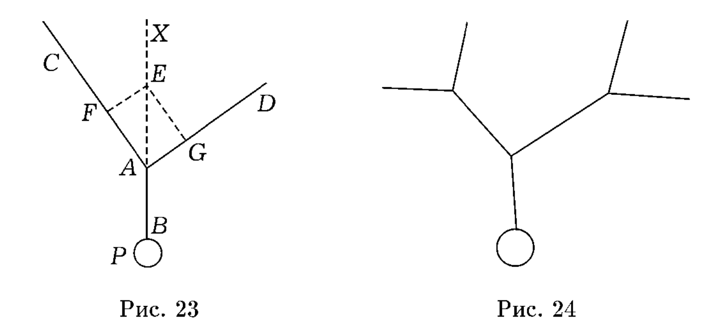


Рис. 23 Рис. 24

Правда, впоследствии Стевин применяет принцип сложения и разложения сил в общей форме, однако путь, которым он к нему приходит, недостаточно ясен или, по крайней мере, не вполне нагляден. Он замечает, например, что в случае трех вытянутых под произвольными углами нитей AB, AC, AD с грузом P, приложенным к первой из них, напряжения могут быть найдены следующим образом: продолжив AB до X (рис. 23), откладывают отрезок AE; если теперь от E провести линию EF параллельно к AD и линию EG — параллельно AC, то напряжения нитей AB, AC, AD будут соответственно пропорциональны отрезкам AE, AF, AG.

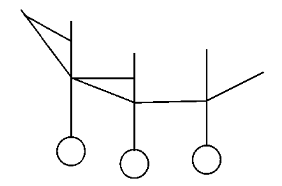


Рис. 25

С помощью этого принципа конструкции он затем решает уже довольно сложные задачи. Он определяет, например, напряжения в системе сплетенных нитей (рис. 24), причем он, разумеется, исходит от данного напряжения вертикальной нити.

Условия напряжения в веревочном многоугольнике тоже находятся при помощи конструкции, как это намечено на рис. 25.

Итак, с помощью принципа наклонной плоскости может быть подобным же образом сделана попытка выяснения условий остальных простых машин, как она была сделана при помощи принципа рычага.

3. Принцип сложения сил

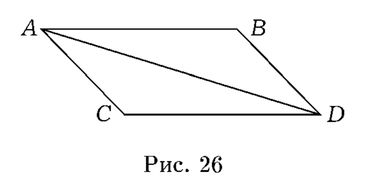


Рис. 26

1. Правило параллелограмма сил, к которому пришел и который применял Стевин, не формулируя его, впрочем, вполне ясно, заключается, как известно, в следующем. Если на тело A действуют две силы, направления которых совпадают с линиями AB и AC и величины которых пропорциональны отрезкам AB, AC, то обе силы могут быть в своем действии заменены одной только силой, действующей по диагонали AD параллелограмма $ABCD$ и ей пропорциональной. Поэтому, если бы, например, к нитям AB, AC были приложены грузы, пропорциональные отрезкам AB, AC, их мог бы заменить в их действии один груз, приложенный к нити AD и пропорциональный отрезку AD. Силы AB и AC называются составляющими, а сила AD — равнодействующей. Само собой разумеется, что дело может происходить и наоборот, т. е. *одна* сила может быть заменена двумя или несколькими силами.

2. Попробуем рассмотреть, как можно было бы прийти к общему правилу параллелограмма сил, исходя из исследования Стевина. Найденное Стевином отношение двух перпендикулярных друг к другу сил к третьей силе, уравновешивающей их, мы предполагаем (косвенно) данным. Допустим, что на нити OX, OY, OZ действуют силы натяжения, уравновешивающие друг друга. Попробуем определить эти силы. Каждая из них уравновешивает две другие. Силу OY мы заменяем (на основании принципа Стевина) двумя перпендикулярными друг к другу силами в направлении Ou (продолжении OX) и перпендикулярном к нему направлении Ov. Точно так же мы разлагаем силу OZ на Ou и Ow. Сумма сил, действующих в направлении Ou, должна уравновешивать силу OX, между тем как силы, действующие в направлении Ov и Ow, должны это равновесие нарушать. Примем последние две силы равными и противоположно направленными и представим их

через отрезки Om и On и мы определим составляющие Op, Oq, направленные по Ou, а также и натяжения Or и Os. Сумма $Op + Oq$ равна и противоположна натяжению, действующему в направлении OX. Если теперь провести st параллельно OY или rt параллельно OZ, то обе линии дадут отрезок $Ot = Op + Oq$ и этим найден более общий принцип параллелограмма сил.

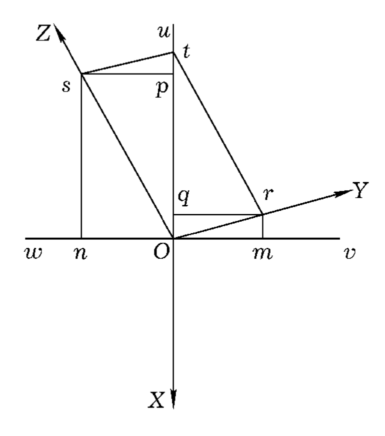


Рис. 27

Это общее правило параллелограмма сил может быть еще и другим образом получено из сложения сил, действующих под прямым углом. Пусть OA и OB — обе силы, действующие на точку O. Мы заменяем OB силой OC, действующей по OA, и силой OD, действующей в перпендикулярном к ней направлении. Тогда вместо OA и OB у нас будут действовать силы $OE = OA + OC$ и OD, равнодействующая которых OF есть вместе с тем диагональ построенного на линиях OA и OB параллелограмма $OAFB$.

3. Если прийти к правилу параллелограмма сил путем Стевина, оно представляется, как нечто, найденное косвенным путем. Оно оказывается выводом из известных фактов или условием их. Но мы тогда только видим, что оно существует, но не видим, *почему* оно существует, другими словами, мы не можем его свести (как в динамике) к еще более простым правилам. В статике правило это нашло настоящее применение тоже лишь у Вариньона, когда динамика, ведущая прямо к этому правилу, настолько уже развилась, что позаимствования из нее могли происходить без всякого труда. Правило параллелограмма сил было впервые ясно высказано Ньютоном в его «Principien der Nalurphilosophie» («Принципы философии природы»). В том же году высказал это правило и Вариньон независимо от Ньютона и в сочинении, предложенном Парижской Академии Наук, но напечатанном лишь после смерти Вариньона. В этом сочинении он высказывает это правило и с помощью геометрической теоремы дает ему применение.

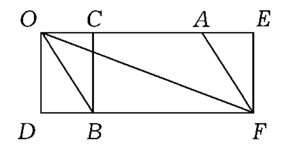


Рис. 28

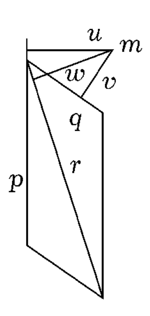


Рис. 29

Теорема эта следующая: если мы из точки m, лежащей в плоскости параллелограмма, но *вне* угла, заключенного между сторонами p, q и содержащего равнодействующую r, опустим перпендикуляры на направления этих трех прямых и обозначим их буквами u, v, w, то $p \cdot u + q \cdot v = r \cdot w$. Доказать эту теорему нетрудно, если соединить точку m с концами прямых p, q, r и рассмотреть образующиеся треугольники, площади которых соответствуют половинам означенных произведений. Если точка m лежит *внутри* упомянутого угла, то, опустив перпендикуляры, получаем следующее: $p \cdot u - q \cdot v = r \cdot w$. Наконец, если точка m лежит на направлении равнодействующей и из нее опустить перпендикуляры, то, так как длина перпендикуляра, опущенного из нее на диагональ, будет равна нулю, теорема получает следующую форму: $p \cdot u - q \cdot v = 0$, или $p \cdot u = q \cdot v$.

С помощью замечания, что силы пропорциональны движениям, которые они вызывают в равные времена, Вариньон легко переходит от сложения движений к сложению сил. Силы, действующие на точку как по величине, так и по направлению, представленные через стороны параллелограмма, могут быть заменены силой, таким же образом представленной диагональю этого параллелограмма.

Если в приведенном выше параллелограмме p, q изображают действующие совместно силы (составляющие), а r представляет ту силу, которая может обе их заменить (равнодействующую), то произведения pu, qv, rw называются моментами этих сил относительно точки m. Если точка m лежит на направлении равнодействующей, то относительно ее моменты pu и qv равны.

4. Опираясь на эту теорему, Вариньон мог гораздо проще исследовать машины, чем это могли сделать его предшественники. Рассмотрим, например, твердое тело (рис. 31), способное вращаться около оси, проходящей через точку O. Проведя плоскость, перпендикулярную к этой оси, мы выбираем на ней две точки A, B, к которым на плоскости приложены силы P, Q. Вместе с Вариньоном мы узнаем, что действие сил не изменяется, если точки приложения их перемещаются в направлении действия сил: ведь все точки одного и того же направления неподвижно между собою связаны и одна давит на другую и притягивает ее. На этом основании мы можем представить себе, что сила P приложена, где угодно, в направлении AX, а сила Q — где угодно, в на-

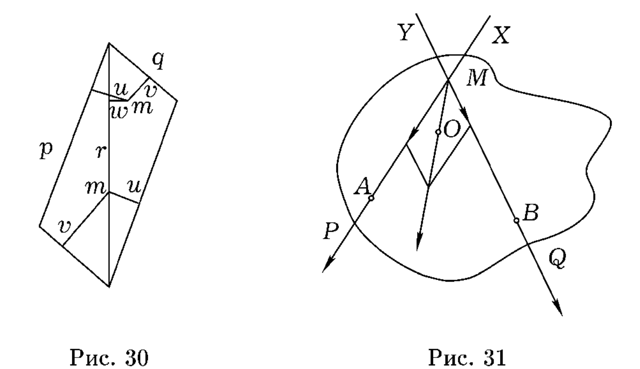


Рис. 30

Рис. 31

правлении BY и, следовательно, также в точке пересечения линий AX и BY, т. е. в точке M. Из сил, перемещенных в точку M, мы строим параллелограмм и заменяем силы их равнодействующей. Действие этой силы для нас только и важно. Если она действует на точки подвижные, то равновесия нет. Если же ее направление проходит через ось, через точку O, которая неподвижна, то никакое движение наступить не может и существует равновесие. В последнем случае точка O есть точка равнодействующей и, если из нее опустить перпендикуляры u, v на направления сил P, Q, то, на основании приведенной выше теоремы, $p \cdot u = q \cdot v$. Таким образом мы вывели закон рычага из правила параллелограмма сил.

Подобным же образом Вариньон объясняет и другие случаи равновесия прекращением действия равнодействующей при помощи какого-нибудь препятствия. На наклонной плоскости, например, равновесие существует, когда равнодействующая перпендикулярна к этой плоскости. Вся статика Вариньона в действительности покоится на динамической основе, она есть для него частный случай динамики. Всегда перед его умственным взором стоит более общий динамический случай, и он добровольно ограничивает исследование случаем равновесия. Мы имеем дело с динамическою статикой, какая была возможна только *после* исследований Галилея. Кстати заметим, что от Вариньона исходит большая часть теорем и способов исследования, образующих статику современных элементарных учебников.

5. Мы видели, что к правилу параллелограмма сил могут привести рассуждения и чисто статические. В специальных случаях правило также очень легко подтвердить. Так, например, нетрудно заметить,

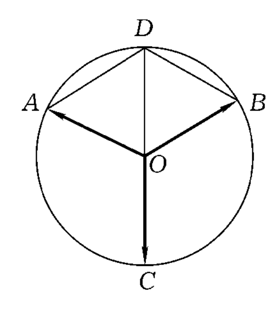


Рис. 32

что произвольного числа равные силы, действующие (натяжением или давлением) на точку в одной плоскости так, что направления каждой пары попеременно образуют равные углы, уравновешивают друг друга. Если, например, на точку O действуют три равные силы OA, OB, OC под углом в 120°, то каждая пара их уравновешивает третью. Можно сейчас заметить, что равнодействующая сил OA и OB равна и противоположна силе OC. Она представлена через OD и есть в то же время диагональ параллелограмма $OADB$, как это легко вывести из того, что радиус круга есть сторона шестиугольника.

6. Если силы действуют в одном и том же или противоположном направлении, то равнодействующая их соответствует сумме или разности составляющих. Нетрудно заметить, что оба случая представляют собою частные случаи правила параллелограмма сил. Если представить себе, что на обоих чертежах (рис. 33) угол AOB постепенно приближается к 0°, а угол $A'O'B'$ приближается к 180°, то легко заметить, что OC переходит в $OA + AC = OA + OB$ и $O'C'$ переходит в $O'A' - A'C' = O'A' - O'B'$. Таким образом, правило параллелограмма сил содержит уже в себе те правила, которые обыкновенно предпосылаются его изложению, как особые правила.

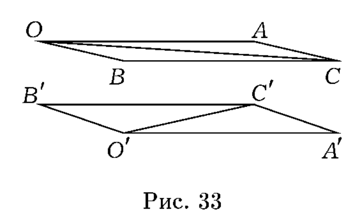


Рис. 33

7. Правило параллелограмма сил в той форме, которую ему придали Ньютон и Вариньон, ясно представляется, как правило, выведенное из опыта. Точка, на которую действуют две силы, выполняет два независимых движения с ускорениями, пропорциональными этим силам. На этом основано построение параллелограмма. Даниель Бернулли был того мнения, что правило параллелограмма сил есть истина *геометрическая* (независимая от данных физического опыта). Он пытается дать и геометрическое доказательство. Изложим основные пункты этого доказательства, так как взгляд Бернулли не исчез совершенно и до настоящего времени.

Если на точку действуют две равные силы, направления которых образуют прямой угол, то, по мнению Бернулли, не может быть со-

мнения, что линия, делящая этот угол пополам, (согласно принципу симметрии) имеет направление равнодействующей r. Чтобы и величину этой равнодействующей определить геометрически, каждая из сил p разлагается на две равные силы q, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к r. Здесь отношение величин p и q есть тоже самое, что и отношение величин r и p. Мы имеем поэтому:

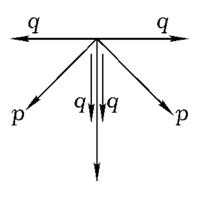


Рис. 34

$$p = \mu \cdot q \text{ и } r = \mu \cdot p, \text{ следовательно } r = \mu^2 q.$$

Так как силы q, перпендикулярные к r, уравновешивают друг друга, а параллельные к r представляют равнодействующую, то мы имеем также:

$$r = 2q, \text{ следовательно, } \mu = \sqrt{2} \text{ и } r = \sqrt{2} \cdot p.$$

Таким образом, равнодействующая и по величине своей представлена диагональю квадрата со стороной p.

Аналогичным образом может быть определена величина равнодействующей для составляющих, неравных, но действующих под прямым углом. Но здесь о направлении равнодействующей r заранее неизвестно ничего. Если разложить составляющие p, q параллельно и перпендикулярно к неопределенному еще направлению r на силы u, s и соответственно v, t, то новые силы образуют с составляющими p, q те же углы, которые образуют силы p, q с равнодействующей r. Этим определены также следующие отношения величин:

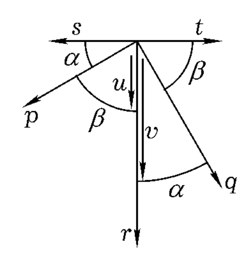


Рис. 35

$$\frac{r}{p} = \frac{p}{u} \text{ и } \frac{r}{q} = \frac{q}{v},$$

$$\frac{r}{q} = \frac{p}{s} \text{ и } \frac{r}{q} = \frac{q}{t};$$

а из последних двух уравнений следует, что

$$s = t = \frac{pq}{r}.$$

С другой же стороны, мы имеем также, что

$$r = u + v = \frac{p^2}{r} + \frac{q^2}{r} \text{ или}$$
$$r^2 = p^2 + q^2.$$

Таким образом, диагональ прямоугольника со сторонами p и q изображает величину равнодействующей.

Для всех ромбов определено *направление*, для всех прямоугольников — *величина* равнодействующей, а для квадрата определены величина и направление. Затем Бернулли решает задачу замены двух равных сил, действующих под углом, двумя другими равными, но действующими под другим углом силами, эквивалентными первым, и при помощи сложных исследований, не вполне безупречных в математическом отношении и исправленных впоследствии Пуассоном, в конце концов приходит к общему правилу.

8. Обратимся теперь к физической стороне вопроса. Правило параллелограмма сил было Бернулли уже знакомо, как правило, выведенное из опыта. Что же, собственно, Бернулли делает? Он представляет себе себя *незнающим* этого и затем старается философски вывести его из возможно меньшего числа предпосылок. Работа эта далеко не бессмысленна и не бесполезна. Напротив, этим способом находят, сколь немного и насколько незаметные *данные опыта* уже дают это правило. Но не следует только обманывать самого себя, как это делает Бернулли, следует принимать во внимание *все* предпосылки и не следует упускать из виду ни одного данного опыта, который непроизвольно применяют. Каковы же те предпосылки, которые лежат в основе вывода Бернулли?

9. Статика знает силу сначала только, как натяжение или давление, которое всегда, каково бы ни было его происхождение, может быть замещено натяжением или давлением какого-нибудь груза. Все силы можно рассматривать, как величины *однородные*, и измерять грузами. Опыт, далее, учит, что состояние равновесия или движения зависит не только от *величины* силы, но и от ее *направления*, которое мы узнаем по направлению наступающего движения, по направлению натянутой нити и т. д. Другим же данным в физическом опыте, как, например, температуре или функции потенциала, мы можем приписывать величину, но не направление. То, что в силе, приложенной к точке, важны не только величина, но и направление, есть уже важное, хотя и не очевидное данное опыта.

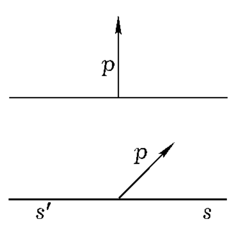


Рис. 36

Если величина и направление приложенных в точке сил *одни* имеют решающее значение, то ясно, что две равные, но противоположным образом направленные силы находятся в равновесии, ибо никакое движение не может быть ими определено *однозначно*. Точно так же не определено однозначно движение, если какая-нибудь сила p действует перпендикулярно к направлению движения. Если же направление силы p образует тупой или острый угол с другим направлением ss' (рис. 36), то движение в этом последнем направлении может быть однозначно определено. Но только из *опыта* мы можем знать, что движение определено в направлении $s's$, а не в направлении ss', т. е. в сторону *острого* угла или в ту сторону, на которой сила p дает проекцию на линию $s's$.

Вот этим последним фактом опыта и воспользовался с самого начала Бернулли. *Направление* равнодействующей двух равных и перпендикулярных друг к другу сил может быть указано только на основании этого факта опыта. Из принципа же симметрии следует только то, что равнодействующая лежит в *плоскости* сил составляющих и на *линии, делящей угол пополам*, но из него не следует, что она лежит в *остром* угле. Если же отказаться от этого определения, то все доказательство с самого же начала сводится на нет.

10. Раз мы убедились, что влияние направления силы мы *вообще* знаем только из опыта, то мы тем не менее еще поверим тому, что *род* этого влияния может быть найден каким-нибудь *иным* путем. Догадаться о том, что сила p, действующая в направлении s, образующем с ее собственным направлением угол α, действует, как сила $p\cos\alpha$ в направлении s — что равнозначно с правилом параллелограмма сил — невозможно. Да и для Бернулли это было бы невозможно. Но он пользуется едва заметным образом такими данными опыта, которые уже заранее вместе с тем определяют это математическое отношение.

Тот, для кого сложение и разложение сил есть дело *знакомое* уже и *привычное*, знает, что несколько сил, приложенных в одной точке, могут быть заменены в своем действии в *каждом* отношении и в *каждом* направлении *одной* силой. В методе доказательства Бернулли знание это выражается в том, что силы p, q рассматриваются, как такие силы, которые вполне могут заменить как в направлении r, так и во всяком другом направлении силы s, u и t, v. Точно так же r рассматривается,

как эквивалент p и q. Далее, считается безразличным, оцениваются ли сначала силы s, u, t, v в направлениях p, q и потом силы p, q в направлении r или силы s, u, t, v прямо оцениваются в направлении r. Все же это может знать только такой человек, который обладает уже весьма обширным опытом в деле сложения и разложения сил. Проще всего приходят к этому знанию, если знают, что сила p, действующая в направлении, образующем с ее собственным направлением угол α, действует как сила $p\cos\alpha$. И в *действительности* к этому знанию пришли именно этим путем.

Пусть на точку действуют в одной плоскости силы P, P', P'', ... под углами α, α', α'', ... к данному направлению X. Пусть эти силы могут быть заменены одной силой Π, образующей какой-нибудь угол μ с X. Согласно известному принципу, мы имеем

$$\sum P\cos\alpha = \Pi\cos\mu.$$

Для того чтобы сила Π могла заменять нашу систему сил при всяком направлении X, когда она повернута на произвольный угол δ, должно быть

$$\sum P\cos(\alpha+\delta) = \Pi\cos(\mu+\delta)$$

или

$$\Big(\sum P\cos\alpha - \Pi\cos\mu\Big)\cos\delta - \Big(\sum P\sin\alpha - \Pi\sin\mu\Big)\sin\delta = 0.$$

Если примем, что

$$\sum P\cos\alpha - \Pi\cos\mu = A,$$

$$-\Big(\sum P\sin\alpha - \Pi\sin\mu\Big) = B,$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{B}{A},$$

то мы получим, что

$$A\cos\delta + B\sin\delta = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\delta+\tau) = 0.$$

Это уравнение может существовать для *любого* угла δ, если только

$$A = \sum P\cos\alpha - \Pi\cos\mu = 0$$

и

$$B = \Big(\sum P\sin\alpha - \Pi\sin\mu\Big) = 0.$$

Отсюда следует

$$\text{П} \cos\mu = \sum P \cos\alpha,$$

$$\text{П} \sin\mu = \sum P \sin\alpha.$$

Из этих уравнений мы получаем для П и μ следующие определенные величины:

$$\text{П} = \sqrt{\left[\left(\sum P \sin\alpha\right)^2 + \left(\sum P \cos\alpha\right)^2\right]}$$

и

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\sum P \sin\alpha}{\sum P \cos\alpha}.$$

Итак, если действие какой-нибудь силы в данном направлении может быть измерено ее *проекцией* на это направление, то действительно, каждая система сил, приложенная в одной точке, может быть заменена *одной* силой *определенной* величины и *определенного* направления. Но приведенные рассуждения становятся невозможны, если заменить $\cos\alpha$ какой-нибудь общей угловой функцией $\varphi(\alpha)$. Если же мы совершим эту замену и будем при этом рассматривать равнодействующую, как силу *определенную*, то, как это показывает, например, вывод Пуассона, мы получим для $\varphi(\alpha)$ форму $\cos\alpha$. Таким образом, познание, что несколько сил, действующих в одной точке, могут быть всегда и во всяком отношении заменены *одной* силой, *математически равнозначно* с принципом параллелограмма сил или с принципом проекций. Но гораздо легче при помощи наблюдения найти принцип параллелограмма сил или принцип проекций, чем статическими наблюдениями прийти к тому более общему познанию. И в действительности принцип параллелограмма был получен раньше. Да и нужна была бы почти сверхчеловеческая гениальность для того, чтобы из общей возможности замены нескольких сил *одной* можно было чисто математически, не руководствуясь иным путем полученными знаниями, вывести принцип параллелограмма. Против вывода Бернулли мы поэтому выдвигаем тот факт, что легче наблюдаемое было сведено к труднее наблюдаемому. Здесь налицо прегрешение против экономии науки. Кроме того, Бернулли обманывается, полагая, что он вообще не исходил из наблюдения.

Необходимо еще заметить, что и *взаимная независимость сил друг от друга*, выражающаяся в принципе сложения сил, тоже есть данное

опыта, которым Бернулли постоянно молча пользуется. Покуда мы имеем дело с правильными или симметрическими системами сил, в которых каждая сила равноценна, каждая из них может даже в случае взаимной зависимости находиться только под одинаковым действием всех остальных. Уже в случае трех сил, из которых две симметричны относительно третьей, исследование становится трудным, как только допускается возможность взаимной зависимости сил.

11. Раз только пришли прямо или косвенно к принципу параллелограмма сил, раз познание этого принципа совершилось, он представляет такой же факт наблюдения, как и всякий другой. Когда наблюдение свежо, оно не пользуется еще, разумеется, нашим доверием так, как старые, многократно испытанные наблюдения. Мы пытаемся тогда подтвердить новое наблюдение старыми, доказать согласие их между собою. Мало-помалу новое наблюдение становится равноправным со старыми и нет более надобности сводить первое к последним. Такой вывод становится тогда целесообразным только в том случае, если наблюдения, которые трудно сделать непосредственно, можно свести к наблюдениям более простым и легче получаемым, как это происходит, например, с принципом параллелограмма сил в динамике.

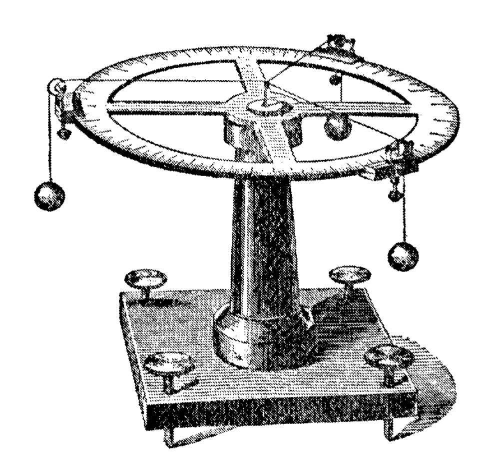


Рис. 37

12. Правило параллелограмма сил пытались представить и наглядно специально для этой цели устроенными опытами. Весьма удобный прибор для этого предложен Вариньоном. Горизонтальный круг с делениями (рис. 37) имеет в центре острие. Три связанные между собою нити f, f', f'' переброшены через блоки r, r', r'', которые могут быть установлены в каком угодно месте на окружности круга и отягчены грузами p, p', p''. Если, например, приложены три равных груза и блоки установлены в точках деления 0, 120, 240, то точка пересечения нитей устанавливается в центре круга. Таким образом, три равные силы, действующие под углом в 120°, уравновешивают друг друга.

Другой случай может быть представлен следующим образом. Представляют себе две произвольные силы p, q под произвольным углом α, изображают их линиями и строят на них, как на сторонах, параллелограмм. Далее, в той же точке заставляют действовать третью силу, равную равнодействующей r и противоположным образом направленную. Три силы p, q, $-r$ уравновешивают друг друга под углами, очевидными из конструкции. Устанавливают блоки нашего аппарата на точках деления 0, α, $\alpha+\beta$ и отягощают соответствующие нити грузами p, q, r. Точка пересечения нитей устанавливается тогда в центре круга.

4. Принцип возможных перемещений

1. Перейдем теперь к обсуждению принципа возможных перемещений. Правильность этого принципа была впервые замечена Стевином в конце XVI столетия при исследовании равновесия блоков и систем блоков. Сначала Стевин исследовал системы блоков обычным еще и теперь образом. В случае *a* (рис. 39) по известным уже причинам существует равновесие, когда по обеим сторонам грузы P равны. В случае *b* груз P висит на двух параллельных веревках, из которых каждая, следовательно, обременена грузом $P/2$, вследствие чего в случае равновесия должен быть подвешен такой же груз и к свободному концу веревки. В случае *c* груз P висит на шести веревках и груз $P/6$ на свободном конце веревки создает равновесие. В случае *d*, в так называемом блоке Архимеда, P висит сначала на двух веревках, из которых каждая несет $P/2$, одна из них висит еще на двух веревках и т. д., так что для равновесия свободный конец веревки должен носить $P/8$. Если сообщить этим сис-

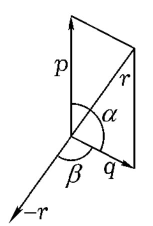


Рис. 38

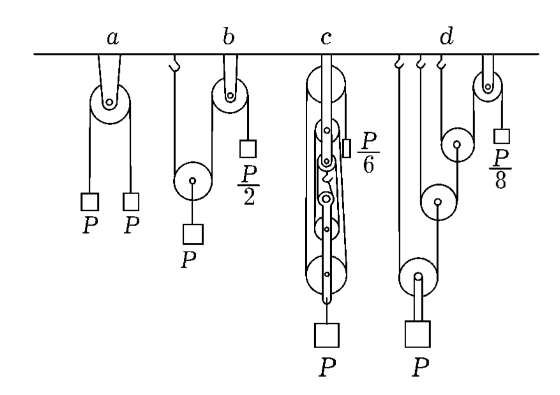


Рис. 39

темам блоков перемещения, в которых груз P опускается на высоту h, то нетрудно заметить, что вследствие расположения веревок

уравновешивающий	груз	P	в	a	поднимется	на	высоту	h,
"	"	$\frac{P}{2}$	"	b	"	"	"	$2h$,
"	"	$\frac{P}{6}$	"	c	"	"	"	$6h$,
"	"	$\frac{P}{8}$	"	d	"	"	"	$8h$.

Таким образом, в случае равновесия системы блоков произведения грузов на принадлежащие им величины перемещений с обеих сторон равны. («Ut spatium agentis ad spatium patentis, sic potentia patientis ad potentiam agentis», Stevini, «Hypomnemata», T. IV, lib. 3, p. 172). В этом замечании содержится уже зерно принципа возможных перемещений.

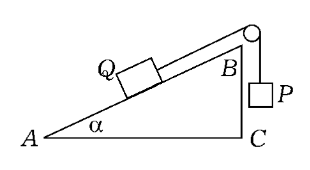


Рис. 40

2. По другому случаю, а именно при исследовании равновесия на наклонной плоскости, Галилей познал правильность этого принципа и нашел также несколько более общую его форму. На наклонной плоскости с длиной AB, вдвое большей высоты BC, груз Q, лежащий на AB, уравновешивается грузом P, действующим вдоль высоты BC, если $P = Q/2$. Если грузы приведены в движение, то, когда P $(= Q/2)$ опускается на высоту h, груз Q поднимается на то же расстояние h вдоль AB. Изучая это явление, Галилей заметил, что равновесие определяется не только грузами, но и *возможным приближением их к центру Земли и удалением от него.* Когда $Q/2$

опускается вдоль высоты на h, то Q поднимается вверх вдоль длины наклонной плоскости на расстояние h, но в вертикальном направлении только на $h/2$ и именно так, что произведения $Q \cdot \frac{h}{2}$ и $\frac{Q}{2} \cdot h$ оказываются равными. Трудно достаточно ярко обрисовать, сколь велико разъясняющее значение замечания Галилея и какой яркий свет оно распространяет. И притом оно столь естественно, столь ненасильственно, что всякий его охотно принимает. Что может быть проще? В системе тяжелых тел не наступает движения, если в целом ни одна тяжелая масса опускаться не может. Это кажется нам инстинктивно приемлемым.

Понимание наклонной плоскости Галилеем кажется нам гораздо менее остроумным, чем понимание Стевина, но мы признаем его более естественным и глубоким. Галилей здесь является столь великим научным характером, что у него хватает *интеллектуального* мужества усматривать в деле давно исследованном *больше*, чем видели его предшественники, и доверять своему наблюдению. Со свойственной ему откровенностью он высказывает перед читателями свой взгляд вместе с мотивами, которые привели его к нему.

3. Применяя понятие «центр тяжести», Торричелли дает принципу Галилея форму, в которой он еще ближе нашему чувству и в которой, впрочем, приходилось уже его применять и Галилею. По Торричелли, в машине существует равновесие, когда при перемещении ее центр тяжести подвешенных грузов не может опускаться. При перемещении на описанной выше плоскости, например, P опускается на расстояние h, но зато груз Q поднимается в вертикальном направлении на расстояние $h \cdot \sin\alpha$. Чтобы центр тяжести не опускался, необходимо, чтобы

$$\frac{P \cdot h - Q \cdot h \cdot \sin\alpha}{P + Q} = 0 \text{ или } P \cdot h - Q \cdot h \cdot \sin\alpha = 0,$$

или

$$P = Q \cdot \sin\alpha = Q \cdot \frac{BC}{AB}.$$

Если между грузами существует другое отношение, то центр тяжести может при том или другом перемещении опускаться и равновесия нет. Мы *инстинктивно* ожидаем равновесия, когда центр тяжести системы тяжелых тел опускаться не может. Но в выражении Торричелли вовсе не содержится *больше*, чем в выражении Галилея.

4. Правильность принципа возможных перемещений легко доказать не только на системе блоков и наклонной плоскости, но и на других машинах, на рычаге, вороте и т. д. В случае ворота, например, с радиу-

сами R и r и с соответствующими грузами P, Q равновесие существует, как известно, тогда, когда $PR = Qr$. Если повернуть ворот на угол α, то P опускается вниз на $R\alpha$, а Q поднимается вверх на $r\alpha$. С точек зрения Стевина и Галилея, мы имеем в случае равновесия $P{\cdot}R\alpha = Q{\cdot}r\alpha$, каковое уравнение выражает то же самое, что и приведенное выше.

5. Если мы сравниваем систему тяжелых тел, находящуюся в движении, с подобной ей системой, находящейся в состоянии равновесия, то у нас возникает вопрос: в чем заключается различие между обоими случаями? в чем заключается момент, определяющий движение (нарушающий равновесие) — момент, который в одном случае существует, а в другом нет? Задавшись этим вопросом, Галилей признал определяющими движение не только грузы, но и *высоты их падения* (величины их вертикального перемещения). Обозначим через P, P', P'' ... веса системы тяжелых тел и через h, h', h'' ... величины соответственных одновременно возможных перемещений, причем перемещения вниз будем называть положительными, а перемещения вверх — отрицательными. И Галилей находит, что признак случая равновесия заключается в выполнении условия $Ph+P'h'+P''h''+\ldots = 0$. Сумма $Ph+P'h'+P''h''+\ldots$ есть момент, нарушающий равновесие, определяющий движение. В новейшее время эта сумма, вследствие важности ее значения, обозначается особым именем «*работа*».

6. В то время, как более древние исследователи, сравнивая случаи равновесия и движения, обращали свое внимание на грузы и расстояния их от оси вращения и признавали решающее значение за *статическими моментами*, Галилей рассматривает грузы и их *высоты падения* и признает решающее значение за *работой*. Само собой разумеется, что невозможно приписывать исследователю, *какие* признаки равновесия ему следует принимать во внимание, раз есть несколько на выбор. Только успех может решить, сделан ли выбор правильный. Но если нельзя, как мы видели, изображать значение статических моментов, как нечто данное, независимое от опыта, логически очевидное, то того же самого не следует делать и с работой. Паскаль ошибается — и эту ошибку разделяют с ним некоторые современные исследователи, когда он, применяя принцип возможных перемещений к жидкостям, говорит: «etant clair, que c'est la même chose de faire faire un pouce de chemin à cent livres d'eau, que de faire faire cent pouces de chemin a une livre d'eau» («ясно, что одно и то же поднять ли сто фунтов воды на один дюйм, или поднять один фунт воды на сто дюймов»). Это верно только тогда,

когда признано уже *определяющее* значение за работой, что может быть только следствием опыта.

Когда мы имеем перед собой равноплечий равно нагруженный рычаг, мы признаем равновесие его единственным однозначно определенным действием, безразлично, считаем ли мы определяющими движение моментами грузы и расстояния их или грузы и высоты падения. Но эти или подобные им эмпирические познания должны уже заранее у нас существовать, если мы вообще хотим иметь суждения в данном случае. *Форму* зависимости нарушения равновесия от приведенных условий и, следовательно, значение статического момента (PL) или работы (Ph) еще меньше можно получить одним философствованием, чем зависимость вообще.

7. Когда друг другу противопоставлены две равные силы с равными, но противоположными величинами перемещений, мы узнаем существование равновесия. У нас может явиться желание свести более общий случай грузов P, P' с величинами перемещений h, h' (причем $Ph = P'h'$) к случаю более простому. Пусть мы имеем, например, грузы $3P$ и $4P$ на вороте с радиусами 4 и 3. Мы делим грузы на равные части величиною в P и обозначаем их буквами a, b, c, d, e, f, g. Мы опускаем a, b, c до уровня $+3$ и поднимаем d, e, f до уровня -3. Это перемещение грузы не предпримут сами, но и не будут ему противодействовать. Теперь мы выбираем груз g на уровне 0 и груз a на уровне $+3$, перемещаем первый до -1, а второй до $+4$, затем подобным же образом перемещаем g до -2 и b до $+4$, g до -3 и c до $+4$. Всем этим перемещениям грузы не оказывают никакого сопротивления, но и не производят их сами. Но в конце концов a, b, c (или $3P$) оказываются на уровне $+4$, а d, e, f, g (или $4P$) на уровне -3. Таким образом, и это перемещение грузы не производят сами, да и не оказывают ему сопротивления; другими словами, при этом перемещении грузы остаются в равновесии. В данном случае, следовательно, характерно для равновесия уравнение $4 \cdot 3P - 3 \cdot 4P = 0$. Обобщение этого случая ($Ph - P'h' = 0$) ясно само собой.

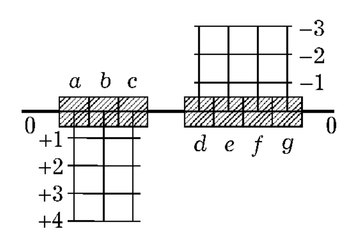


Рис. 41

При достаточной внимательности нетрудно заметить, что невозможно сделать этого заключения, если не предположить заранее *безраз-*

личия порядка операций и формы вывода, т. е. если работа не усмотрена уже как определяющий момент. Принимая заключение, мы совершили бы ту же ошибку, которую совершил Архимед в своем выводе закона рычага, что было уже подробно изложено выше и в данном случае подробно излагать нет более надобности. При всем том приведенное соображение полезно постольку, поскольку оно указывает на родственную связь между простым и сложным случаем.

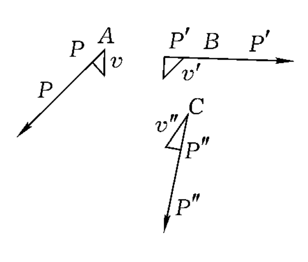


Рис. 42

8. Общее значение принципа возможных перемещений для всех случаев равновесия было исследовано Иоганном Бернулли, и это свое открытие (1717) он сообщил в письме Вариньону. Выразим этот принцип в его наиболее общей форе. Пусть в точках A, B, C, ... действуют силы P, P', P'', ... Мы сообщаем точкам какие-нибудь бесконечно малые совместимые с природой их связи (так называемые возможные) перемещения v, v', v'', ... и образуем проекции их p, p', p'', ... на направления сил. Эти проекции мы считаем положительными, когда они падают на направления сил, и отрицательными, когда они падают на противоположные направления. Произведения $P \cdot p$, $P' \cdot p'$, $P'' \cdot p''$, ... называются возможными моментами и в упомянутых двух случаях имеют противоположные знаки. Наш принцип выражает то, что в случае равновесия $P \cdot p + P' \cdot p' + P'' \cdot p'' + \ldots = 0$ или, короче, $\sum P \cdot p = 0$.

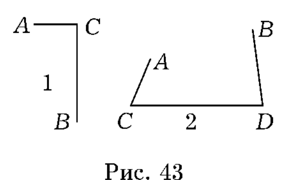


Рис. 43

9. Рассмотрим некоторые пункты несколько подробнее. До Ньютона под силой почти всегда понимали только натяжение или давление тяжелого тела. Все исследования по механике того времени были посвящены почти исключительно тяжелым телам. Когда в эпоху Ньютона понятие силы было обобщено, все теоремы механики, которые были известны для тяжелых тел, оказалось возможным тотчас же перенести на произвольные силы. Каждую силу можно было заменить натяжением твердого тела, действующим на веревку. В этом смысле и принцип возможных перемещений, найденный первоначально только для тяжелых тел, тоже оказалось возможным применить ко всем возможным силам.

Возможными перемещениями называют такие перемещения, которые совместимы с природой связи данной системы и между собой. Если, например, точки системы A, B, к которым приложены силы, связаны между собою прямоугольным рычагом, способным вращаться около точки C, то для $CB = 2CA$ все возможные перемещения точек B и A суть всегда только дуги круга с центром в точке C, перемещения точки B всегда вдвое больше перемещений точки A и перемещения одной всегда перпендикулярны к перемещениям другой точки. Если точки A и B соединены нитью длиною в 1, которая может скользить через неподвижные кольца C и D, то возможны все те перемещения точек A и B, при которых эти точки могут двигаться по двум шаровым поверхностям, описанным радиусами r_1 и r_2 около точек C и D (как центров), или внутри этих шаровых поверхностей, причем $r_1 + r_2 + CD = 1$.

Применение *бесконечно малых* перемещений вместо конечных, которые рассматривал Галилей, оправдывается следующими замечаниями. Когда 2 груза находятся в равновесии на наклонной плоскости, то это равновесие не нарушается, если плоскость там, где она не соприкасается непосредственно с телами, переходит в поверхность другой формы. Важна, следовательно, мгновенная перемещаемость системы при данном ее состоянии. Для оценки равновесия перемещения должны только быть приняты бесконечно малыми, так как иначе система перейдет в другое состояние, в котором равновесие может уже не существовать.

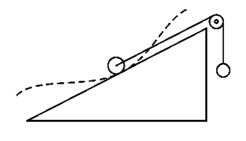
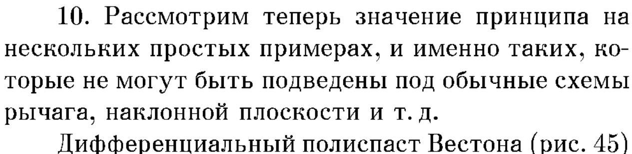


Рис. 44

Что решающее значение имеют не перемещения вообще, а только перемещения в *направлении* сил, т. е. их *проекции* на направления сил, достаточно ясно познал уже Галилей на случае наклонной плоскости.

Что касается выражения принципа, то необходимо заметить, что нет вовсе никакой задачи, если все точки системы, на которые действуют силы, друг от друга независимы. Каждая такая точка только тогда может быть в равновесии, когда она неподвижна в *направлении* действия силы. Для каждой такой точки в отдельности возможный момент равен нулю. Если одни точки системы независимы друг от друга в своих перемещениях, но другие — зависимы, то для первых имеет силу сделанное выше замечание. Для последних же имеет силу найденный Галилеем основной закон, что сумма их возможных моментов равна

нулю. Вследствие этого вся сумма возможных моментов этой системы тоже равна нулю.



10. Рассмотрим теперь значение принципа на нескольких простых примерах, и именно таких, которые не могут быть подведены под обычные схемы рычага, наклонной плоскости и т. д.

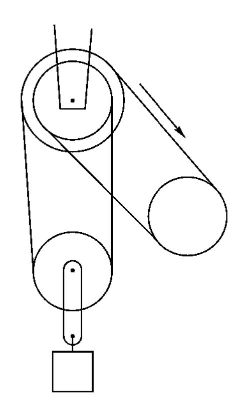
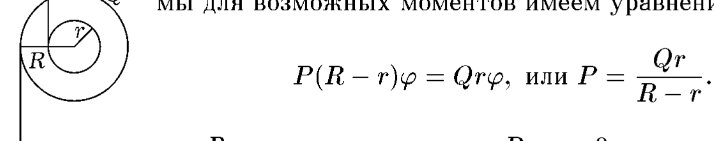


Рис. 45

Дифференциальный полиспаст Вестона (рис. 45) состоит из двух неподвижно связанных между собою блоков, на одной оси с радиусами r_1 и r_2, из которых один только немного больше другого, а именно $r_2 < r_1$. Через оба блока переброшена нить или цепь указанным на рисунке образом. Если потянуть за веревку в направлении стрелки с силой P и если происходит вращение на угол φ, то подвешенный груз Q немного приподымается. В случае равновесия между обоими возможными моментами существует отношение, выраженное уравнением $Q\frac{r_1 - r_2}{2}\varphi = Pr_1\varphi$, или $P = Q\frac{r_1 - r_2}{2r_1}$.

Возьмем ворот (рис. 46) веса Q, который своей веревкой наматывается на вал и поднимается вверх вследствие разматывания веревки с грузом P. В случае равновесия мы для возможных моментов имеем уравнение:



$$P(R - r)\varphi = Qr\varphi, \text{ или } P = \frac{Qr}{R - r}.$$

Рис. 46

В частном случае, когда $R - r = 0$, мы для равновесия должны принять, что и $Qr = 0$ или, в случае конечных величин для r, $Q = 0$. И действительно, веревка тогда имеет значение петли, в которой находится груз Q. Этот груз, если он отличен от нуля, может опускаться вниз, не приводя в движение груза P. Но если при $R = r$ и $Q = 0$, то $P = \frac{0}{0}$, т. е. P есть величина неопределенная. И действительно, аппарат уравновешивается *всяким* грузом P, потому что при $R = r$ никакой груз не может опускаться.

Пусть двойной блок (рис. 47) с радиусами r и R лежит с трением на горизонтальной подставке, между тем как на нити действуют силы P и Q. Если мы силой P обозначим трение подставки, то равновесие су-

ществует, когда $Q = \frac{2R}{R-r} \cdot P$. Но если $P' < \frac{R+r}{R-r} \cdot P$, то у нас будет рядом с качением и скольжение.

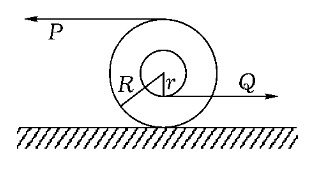


Рис. 47

Весы Роберваля состоят из параллелограмма с непостоянными углами, в котором 2 противоположные стороны вращаются около средних своих точек A и B. На обеих других сторонах, остающихся всегда вертикальными, укреплены горизонтальные стержни. Если повесить на эти по равному грузу P, то равновесие существует независимо от точки привеса, ибо при перемещении расстояние, пройденное опустившимся грузом, бывает всегда равно расстоянию, пройденному поднявшимся грузом.

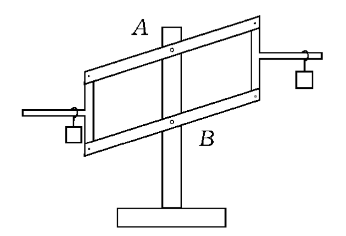


Рис. 48

Пусть в трех определенных точках A, B, C помещены блоки, через которые переброшены три нити с равными грузами и связанные в точке O. В каком положении существует равновесие? Примем длины нитей

$$AO = s_1,\ BO = s_2 \text{ и } CO = s_3.$$

Чтобы получить уравнение равновесия, мы перемещаем точку O в направлениях s_2 и s_3 на бесконечно малые расстояния δs_2 и δs_3 и замечаем, что этим мы можем осуществить перемещение во всяком направлении в плоскости ABC (рис. 50). Сумма возможных моментов будет

$$+\left.\begin{matrix} P\delta s_2 - P\delta s_2 \cos\alpha + P\delta s_2 \cos(\alpha+\beta) \\ P\delta s_3 - P\delta s_3 \cos\beta + P\delta s_3 \cos(\alpha+\beta) \end{matrix}\right\} = 0$$

или

$$[1 - \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta)]\,\delta s_2 + [1 - \cos\beta + \cos(\alpha+\beta)]\,\delta s_3 = 0.$$

Так как каждое из перемещений δs_2, δs_3 произвольно и от других независимо и само по себе может быть принято равным нулю, то отсюда следует, что

$$1 - \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) = 0,$$
$$1 - \cos\beta + \cos(\alpha+\beta) = 0.$$

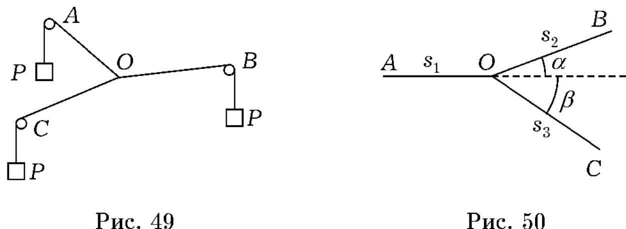


Рис. 49 Рис. 50

Следовательно,

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

и вместо каждого из уравнений мы можем принять

$$1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

и, следовательно, $\alpha + \beta = 120°$.

Таким образом, в случае равновесия каждая из нитей образует с другими угол в 120°, что и непосредственно очевидно, так как три равные силы только при этом условии могут быть в равновесии. Раз это известно, положение точки O относительно A, B, C может быть найдено различным образом. Можно, например, поступить так: строят на AB, BC, CA, как сторонах, по равностороннему треугольнику; если описать около этих треугольников круги, то общая точка пересечения их будет искомой точкой O, что легко можно вывести из известного отношения, существующего между центральным и периферическим углом.

Стержень OA может вращаться в плоскости бумаги около точки O и образует с неподвижной прямой OX непостоянный угол α. В точке A приложена сила P, образующая с OX угол γ, а в точке B к кольцу, перемещающемуся вдоль стержня, приложена сила Q, образующая с OX угол β. Сообщаем стержню бесконечно малое вращение и B и A перемещаются на δs и δs_1 перпендикулярно к OA, и перемещаем кольцо вдоль стержня на δr. Переменное расстояние OB обозначим через r, а $OA = a$. Для случая равновесия мы имеем:

$$Q\delta r\cos(\beta - \alpha) + Q\delta s\sin(\beta - \alpha) + P\delta s_1\sin(\alpha - \gamma) = 0.$$

Так как перемещение δr не оказывает никакого влияния на остальные перемещения, то соответствующий возможный момент сам по себе должен быть равен нулю, а вследствие произвольности величины δr

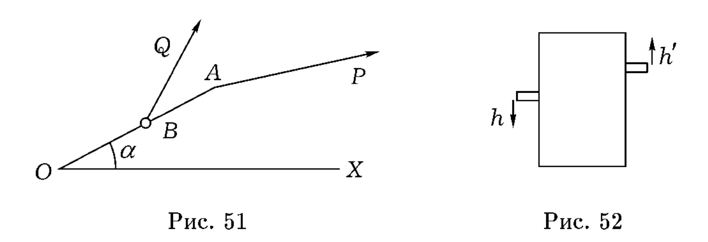


Рис. 51 Рис. 52

должен быть равен нулю и его коэффициент. Поэтому

$$Q\cos(\beta-\alpha)=0$$

или, если Q не равно нулю, то

$$\beta-\alpha=90^\circ.$$

Далее, так как

$$\delta s_1=\frac{a}{r}\delta s,$$

то и

$$rQ\sin(\beta-\alpha)+aP\sin(\alpha-\gamma)=0$$

или, так как $\sin(\beta-\alpha)=1$, то

$$rQ+aP\sin(\alpha-\gamma)=0,$$

чем и дано отношение обеих сил.

11. Очень важное преимущество, представляемое всяким общим принципом, а следовательно, и принципом возможных перемещений, заключается в экономии мышления, т.е. именно в том, что он в большинстве случаев делает излишним размышление над каждым новым специальным случаем. Обладая этим принципом, нам нет, например, надобности задумываться над частностями какой-нибудь машины. Если бы какая-нибудь новая машина была скрыта в каком-нибудь ящике (рис. 52) так, что выдавались бы только два рычага для приложения силы P и грузы P' и мы нашли бы, что одновременные перемещения этих последних равны h и h', мы тотчас знали бы, что в случае равновесия $Ph=P'h'$, какова бы во всем остальном ни была эта машина. Каждый такой принцип имеет, следовательно, известную *экономическую* ценность.

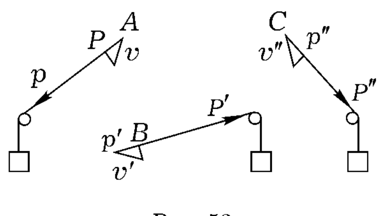


Рис. 53

12. Вернемся еще раз к общему выражению принципа возможных перемещений и будем производить дальнейшее исследование его. Если в точках A, B, C, … приложены силы P, P', P'', … и p, p', p'', … суть проекции бесконечно малых совместимых между собою перемещений, то для случая равновесия мы имеем

$$P \cdot p + P' \cdot p' + P'' \cdot p'' + \ldots = 0.$$

Если заменить силы нитями, переброшенными через блоки в направлениях сил и подвесить соответствующие грузы, то выражение это означает только то, что *центр тяжести* всей системы грузов не может опускаться. Но если бы при известных перемещениях центр тяжести мог *подниматься*, система все же оставалась бы в равновесии, ибо тяжелые тела, предоставленные самим себе, не пришли бы в это движение. В этом случае приведенная выше сумма была бы отрицательной или меньше нуля. Общее выражение условия равновесия выражается поэтому следующим образом:

$$P \cdot p + P' \cdot p' + P'' \cdot p'' + \ldots \leqq 0.$$

Если для каждого возможного перемещения существует *равное и противоположное*, как это, например, бывает у машин, то мы можем ограничиться верхним знаком, *уравнением*. Ибо, если бы при известных перемещениях центр тяжести мог подниматься, то он должен был бы вследствие предположенной обратимости всех возможных перемещений иметь возможность и опускаться. В этом случае, следовательно, и возможное поднятие центра тяжести несовместимо с равновесием.

Иначе обстоит дело, если не все перемещения *обратимы*. Два тела, связанные нитью, могут приближаться друг к другу, но не могут удаляться дальше длины этой нити. Тело может скользить или катиться по поверхности другого тела и таким образом удаляться от этой поверхности, но не переходить через нее. В этих случаях, следовательно, известные перемещения не могут быть обратимы. Поэтому для известных перемещений может происходить *поднятие* центра тяжести без того, чтобы были выполнимы противоположные перемещения, которым

соответствует *опускание* центра тяжести. Мы должны поэтому удержать более общее условие равновесия и сказать, что сумма возможных моментов *равна или меньше нуля.*

13. Обратимся теперь к выводу принципа возможных перемещений, который пытался дать в своей аналитической механике Лагранж. На точки $A, B, C, \ldots$ действуют силы P, P', P'', ... Представим себе, что в точках помещены кольца и что такие же кольца A', B', C', ... укреплены в направлениях сил. Выберем общую меру $Q/2$ сил $P, P', P'' \ldots$ так, чтобы можно было принять:

$$2n\frac{Q}{2} = P,$$

$$2n'\frac{Q}{2} = P',$$

$$2n''\frac{Q}{2} = P'',$$

где n, n', n'', ... — целые числа. Укрепив, далее, нить в кольце A', мы n раз ведем ее от A' к A и обратно, затем пропускаем ее через B', ведем ее n' раз между B' и B, пропускаем через C', ведем ее n'' между C' и C и, наконец, даем ей спадать в C', привязав к концу груз $Q/2$. Так как напряжение этой нити во всех частях ее равно $Q/2$, то мы замещаем через посредство этих идеальных блоков все существующие в системе силы одной силой $Q/2$. Если виртуальные или возможные перемещения при данном расположении системы таковы, что при них груз $Q/2$ может опускаться, то этот груз действительно будет опускаться и вызывать эти перемещения: равновесия, следовательно, не будет. Напротив того, никакого движения не будет, если перемещения оставляют груз $Q/2$ на месте или поднимают его. Выражение этого условия, если проекции возможных перемещений в направлении сил будем считать положительными, принимая во внимание обороты нити в каждом блоке,

$$2np + 2n'p' + 2n''p'' + \ldots \leqq 0.$$

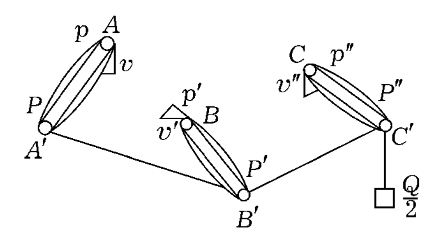


Рис. 54

Но таково же значение и следующего условия:

$$2n\frac{Q}{2}p + 2n'\frac{Q}{2}p' + 2n''\frac{Q}{2}p'' + \ldots \leqq 0$$

или

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots \leqq 0.$$

14. Вывод Лагранжа, действительно, кажется убедительным, если не принимать в соображение несколько чуждой нам фикции блоков, ибо действие одного груза *гораздо более близко* нашему опыту и легче обозримо, чем действие многих грузов. Но то, что решающее значение для нарушения равновесия имеет *работа*, вывод Лагранжа *не доказывает*, а скорее — применением блоков — *уже предполагает*. И действительно, в каждом блоке уже содержится тот факт, который выражен и признан в принципе возможных перемещений. Замещение всех сил *одним* грузом, совершающим ту же работу, именно уже и предполагает знание значения работы и может быть предпринято только под этим условием. То обстоятельство, что некоторые случаи нам более привычны и знакомы и более близки нашему опыту, приводит к тому, что мы их берем, не анализируя, и кладем в основу вывода, не выяснив точно их содержания.

В ходе развития науки часто случается, что новый принцип, усматриваемый исследователем в каком-нибудь факте, не познается и не усваивается сейчас во всей своей общности. Пускаются тогда в ход все средства, чтобы помочь делу, что и обычно и естественно. В подтверждение нового взгляда привлекаются самые различные факты, в которых исследователи вовсе не познают еще этого принципа, хотя он в них содержится, но которые зато, с другой стороны, более привычны и знакомы. *Зрелой* науке не подобает давать ввести себя в заблуждение такими приемами. Если принцип, который не может быть доказан, но может быть признан *существующим*, мы ясно *усматриваем* во всех фактах, то мы гораздо более продвинулись в понимании природы, свободном от противоречий, чем в том случае, если мы даем доказательству мнимому себе импонировать. Встав на эту точку зрения, мы, правда, другими глазами посмотрим на вывод Лагранжа. При всем том этот вывод продолжает нас интересовать и он нравится нам потому, что он иллюстрирует однородность простых и сложных случаев.

15. Мопертюи (Maupertuis) открыл интересное правило относительно равновесия, которое он и сообщил в 1740 году Парижской Академии Наук под названием «Eoi de repos» («Закон покоя»). Правило это

было развито далее в 1751 году Эйлером в работах Берлинской Академии Наук. Если мы в какой-нибудь системе предпринимаем бесконечно малые перемещения, то им соответствует сумма возможных моментов $Pp + P'p' + P''p'' + \ldots$, которая только в случае равновесия равна нулю. Эта сумма есть соответствующая перемещениям работа или, так как в случае бесконечно малых перемещений она сама бесконечно мала, соответствующий элемент работы. Если будем увеличивать перемещения, пока, наконец, не получится перемещение конечное, то элементы работы сложатся в конечную работу. Если мы исходим из известной начальной формы системы и приходим к какой-нибудь другой конечной ее форме, то этой процедуре соответствует известная совершенная работа. И Мопертюи заметил, что эта совершенная работа для конечной формы системы, представляющей состояние равновесия, в общем бывает максимальной или минимальной; это значит, что если мы проводим систему через состояние равновесия, то совершенная работа бывает до и после меньше или больше, чем при самом состоянии равновесия. Для состояния равновесия

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0.$$

Это значит, что элемент работы или дифференциал (правильнее — вариация) работы равен нулю. Если дифференциал функции может быть принят равным нулю, то функция в общем имеет максимальную или минимальную величину.

16. Значение правила Мопертюи легко представить себе весьма наглядным образом.

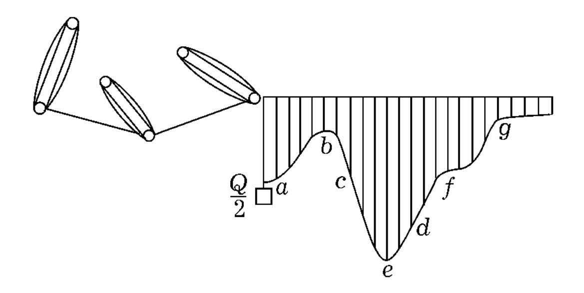


Рис. 55

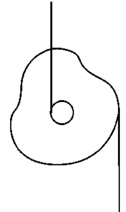
Пусть в какой-нибудь системе сил последние заменены блоками Лагранжа и грузом $Q/2$. Допустим, что каждая точка системы может дви-

гаться по определенной кривой и притом так, что, когда какая-нибудь точка имеет определенное положение на своей кривой, все остальные точки тоже имеют однозначно определенные положения на своих кривых. Такими системами являются обыкновенно машины. Перемещая систему, мы перед ее грузом $Q/2$, двигающимся в вертикальном направлении вверх и вниз и снабженным карандашом, продвигаем в горизонтальном направлении лист бумаги, на которой карандаш и выписывает кривую. Если карандаш находится в точках a, c, d кривой, то существуют соседние места точек системы, в которых груз $Q/2$ находится выше или ниже, чем при данном состоянии. Будь система предоставлена самой себе, груз переместился бы в эти более низкие места и за ним переместилась бы и система. В таких случаях равновесия, следовательно, нет. Когда карандаш находится в точке e, то существуют только соседние положения, в которых груз $Q/2$ может находиться только выше. Но в эти положения система сама переместиться не может. Напротив, при каждом перемещении туда система снова будет стремиться двигаться обратно, благодаря свойству груза двигаться вниз. *Таким образом, самому низкому положению груза, или максимуму совершенной работы в системе соответствует устойчивое равновесие.* Когда карандаш находится в точке b, то нетрудно видеть, что каждое заметное перемещение заставляет груз $Q/2$ опускаться еще ниже, т.е., что груз продолжает это перемещение далее. Но в случае бесконечно малых перемещений карандаш двигается по горизонтальной касательной в точке b и груз, следовательно, не может опускаться. *Таким образом, высшему положению $Q/2$ груза или минимуму совершенной работы соответствует неустойчивое равновесие.* Тут же мы замечаем, что обратного нет, т.е., что не каждому положению равновесия соответствует максимум или минимум совершенной работы. Если карандаш находится в точке f, т.е. в точке с горизонтально отклоняющейся касательной, то для бесконечно малых перемещений опускание груза тоже невозможно. Существует равновесие, хотя совершенная работа не есть ни максимум, ни минимум. Равновесие в данном случае есть так называемое *смешанное* равновесие. Для одних нарушений оно является устойчивым, а для других — неустойчивым. Ничто не мешает относить смешанное равновесие к равновесию неустойчивому. Когда карандаш находится в точке g, где кривая на конечном расстоянии имеет горизонтальное направление, то тоже существует равновесие. Малое перемещение в данном случае ни продолжается далее, ни исправляется. Такое равновесие,

которому тоже не соответствует ни максимум, ни минимум, называется *безразличным.* Если кривая, описанная грузом $Q/2$, имеет острие, направленное вверх, то это последнее изображает минимум совершенной работы, но не равновесие (даже не неустойчивое). Острию, направленному вниз, соответствуют максимум и равновесие устойчивое. Сумма возможных моментов в этом случае равновесия не равна нулю, а величина отрицательная.

17. В нашем рассуждении мы исходили из той предпосылки, что движением какой-нибудь точки системы по кривой определяется движение всех остальных точек на соответствующих им кривых. Но степень перемещаемости системы становится разнообразнее, когда каждая точка может перемещаться на соответствующей ей поверхности, но так однако, что положением точки на соответствующей ей поверхности однозначно определяются положения всех остальных точек. В этом случае мы должны рассматривать уже не кривую, а поверхность, описанную грузом $\frac{Q}{2}$. Если каждая точка может аналогичным образом двигаться в соответствующем пространстве, то исчезает всякая возможность чисто геометрическим образом представлять себе движение груза $\frac{Q}{2}$. Усугубляется еще эта невозможность в том случае, когда положением *одной* точки системы положения всех остальных точек еще не определяются, подвижность же системы еще многообразнее. Но во всех этих случаях кривая, описанная грузом $\frac{Q}{2}$ (рис. 55), может служить нам символом процессов, подлежащих рассмотрению. И в этих случаях мы находим правила Мопертюи.

До сих пор мы предполагали еще, что в системе действуют силы постоянные (неизменяющиеся), независимые от положения точек системы. Если мы примем, что силы зависят от положения точек системы (но не от времени), то мы не можем уже оперировать простыми блоками, а должны пользоваться аппаратами, в которых сила, производимая грузом $\frac{Q}{2}$, изменяется с перемещением, но полученные нами выводы при этом ничуть не изменяются. Расстояние, на которое опускается груз $\frac{Q}{2}$, остается мерилом совершенной работы, которая при одном и том же состоянии системы остается всегда одной и той же и не зависит от пути перемещения и точки приложения силы. Прибором, который при постоянном грузе развивал бы


Рис. 56

силу, изменяющуюся с перемещением, мог бы быть, например, ворот с некруглым колесом, изображенный на рис. 56. На подробностях намеченного здесь случая останавливаться, впрочем, не стоит, так как осуществимость его очевидна.

18. Раз известно отношение между совершенной работой и так называемой живой силой системы, которое констатируется в динамике, нетрудно прийти к следующему правилу, сообщенному Куртивроном в 1749 г. Парижской Академии Наук. Для положения устойчивого (неустойчивого) равновесия, для которого совершенная работа есть максимум (минимум), живая сила подвижной системы есть тоже максимум (минимум) в момент прохождения через это положение равновесия.

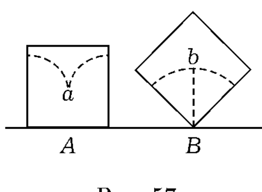
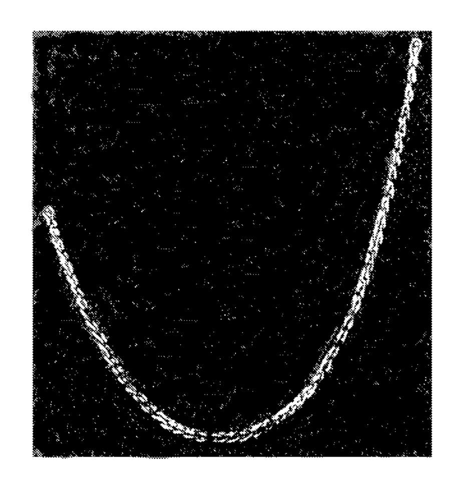


Рис. 57

19. Очень наглядно представляет различные виды равновесия однородный, тяжелый, трехосный эллипсоид, покоящийся на горизонтальной плоскости. Если эллипсоид покоится на крайней точке наименьшей оси, то он находится в положении устойчивого равновесия, ибо каждое перемещение поднимает центр тяжести. Если он покоится на наибольшей оси, то его равновесие неустойчивое. Если эллипсоид покоится на средней оси, то его равновесие смешанное. Однородный шар или однородный круговой цилиндр на горизонтальной плоскости иллюстрируют безразличное состояние равновесия. На рис. 57 изображены пути движения центра тяжести куба, поворачивающегося около своего ребра по горизонтальной плоскости. Положению центра тяжести в точке a соответствует устойчивое, а положению его в точке b неустойчивое равновесие.

20. Рассмотрим теперь один пример, с первого взгляда очень сложный, но легко выясняемый при помощи принципа возможных перемещений. Прогуливаясь по улицам Базеля и обсуждая всевозможные математические вопросы, Иоганн и Якоб Бернулли наткнулись на следующий вопрос: какую форму могла бы принять свободно висящая цепь, укрепленная в двух своих концах? Они скоро и легко сошлись на том взгляде, что цепь примет ту форму равновесия, при которой ее центр тяжести будет лежать возможно ниже. И действительно, нетрудно заметить, что равновесие существует тогда, когда все звенья цепи опустились возможно ниже, когда ни одно из них не может опуститься еще более без того, чтобы, вследствие связи между звеньями, соответствующая масса не поднялась настолько же высоко или еще выше. Когда

центр тяжести опустился возможно ниже, когда совершилось столько, сколько вообще могло совершиться, существует устойчивое равновесие. *Физическая* часть задачи этим исчерпана. Определение кривой с наиболее низким центром тяжести при данной длине между двумя точками A, B есть уже только задача *математическая* (рис. 58).



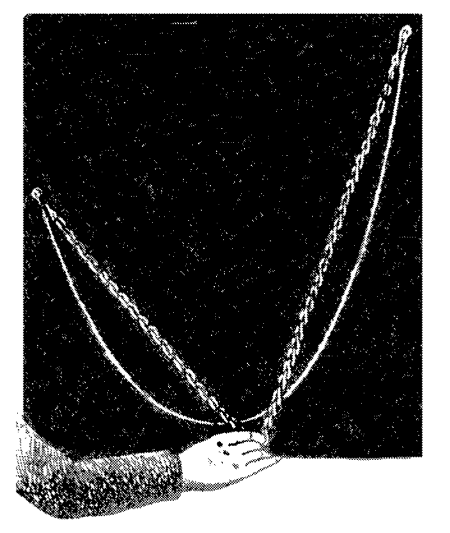


Рис. 58

21. Если обобщить все изложенное нами выше, то нетрудно видеть, что в принципе возможных перемещений содержится лишь признание факта, который инстинктивно был давно уже знаком нам и привычен, но мы только не могли его ясно и точно понять. Факт этот заключается в том, что тяжелые тела могут сами двигаться только вниз. Если несколько тел связаны вместе и не могут поэтому перемещаться независимо друг от друга, то они двигаются только тогда, когда *в целом* может опускаться тяжелая масса или — как это резче выражает именно наш принцип благодаря более совершенному приспособлению наших мыслей к фактам, — когда при этом может быть совершена *работа*. Если с расширением понятия силы мы перенесем этот принцип и на другие силы, кроме сил тяжести, то в этом заключается опять-таки признание того факта, что соответствующие процессы природы происходят сами *только в одном определенном направлении* и не могут происходить в направлении противоположном. Как тяжелые тела мо-

гут сами двигаться только вниз, так разности электрических потенциалов, разности температур могут сами только *уменьшаться*, но не возрастать. Если подобного рода процессы так связаны между собой, что они могут происходить только в противоположном направлении, то наш принцип именно точнее констатирует, чем это могло сделать инстинктивное воззрение, что определяющим моментом для направления процессов является *работа*. Уравнение равновесия, выраженное в принципе, может быть всегда сведено к следующему тривиальному положению: *не происходит ничего, когда ничего происходить не может.*

22. Важно уяснить себе, что в принципе дело сводится исключительно к констатированию факта. Если этого не сделать, то чувствуется всегда, что чего-то не хватает, и человек ищет основания, которого и найти нельзя. В своих «Лекциях по динамике» Якоби рассказывает, будто Гаусс (устно) сказал, что уравнения движения Лагранжа не доказаны, а только исторически выражены. И нам кажется, что этот взгляд вполне приложим и к принципу возможных перемещений.

Задача более древних исследователей, закладывавших основы в какой-нибудь области, была совсем не похожа на задачу позднейших исследователей. Первым приходилось только отыскивать и констатировать важнейшие факты и, как этому учит история, для этого нужно гораздо больше ума, чем это обыкновенно думают. Раз даны важнейшие факты, можно их дедуктивно и логически использовать в математической физики, можно установить порядок в данной области, можно показать, что в допущении *одного* факта содержится уже целый ряд других, которые в первом только не усматриваются сейчас. Одна задача не менее важна, чем другая. Но не следует смешивать одну с другой. Невозможно математически доказать, что природа должна быть именно такой, какая она есть. Но можно доказать, что наблюдаемые свойства одновременно определяют и целый ряд других, часто таких, которых непосредственно усмотреть нельзя.

В заключение следует еще заметить, что, подобно всякому общему принципу, и принцип возможных перемещений светом, который он бросает на явления, действует одновременно *разочаровывающим* и *объясняющим* образом. Разочаровывает он постольку, поскольку мы в нем узнаем — правда, яснее и определеннее — лишь факты, давно известные и инстинктивно познанные. Объясняющим образом он действует тем, что он дает нам возможность в условиях самых сложных усмотреть везде все одни и те же простые факты.

5. Взгляд назад на развитие статики

1. Рассмотрев принципы статики в отдельности, мы можем теперь бросить взгляд назад — на развитие всей статики в целом. Принадлежа к древнейшему периоду механики, берущему свое начало в эпохе древних греков и завершившемуся эпохой расцвета современной механики в работах Галилея и его более молодых современников, статика представляет превосходный пример процесса развития науки. Здесь перед нами все воззрения, все методы в простейшей их форме в эпоху их детства. В этих зачатках мы находим ясные следы их происхождения из опыта ремесленника. Потребности дать этим данным опыта такую форму, при которой они могли бы *сообщаться* другим людям, и дать им распространение за пределы сословия и ремесла — вот чему наука обязана своим зарождением. Тот, который собирает эти данные опыта, который старается сохранить их в записанном виде, имеет пред собою много различных таких данных или принимаемых за различные. Такой человек имеет большую возможность обозреть эти данные в различном порядке и беспристрастно, чем человек, работающий в небольшой и ограниченной области. В его голове, в его записках факты и их правила становятся ближе друг другу временно и пространственно, благодаря чему легче обнаруживается родственная связь между ними, постепенный переход их друг в друга. К тому же самому вынуждает желание упростить и сократить то, что подлежит сообщению другим людям. Таким образом, благодаря этому многие факты и их правила по соображениям экономии мышления обобщаются и подводятся под *одно* выражение.

2. Подобного рода собиратель имеет еще случай усмотреть *новую* сторону фактов, на которую прежние наблюдатели не обращали внимания. Правило, полученное из наблюдения фактов, не может обнять *всего* факта в его бесконечном богатстве, в его неистощимом многообразии, а дает только *набросок* факта, односторонне выдвигая то, что важно с точки зрения технической (или научной). На какие стороны факта обращается внимание, зависит, следовательно, от обстоятельств случайных и даже от произвола наблюдателя. Вследствие этого найдется всегда повод заметить новую сторону факта, которая приведет к установлению новых правил, не хуже старых или даже лучших. Так, например, в рычаге было сначала обращено внимание на грузы и плечи (Архимед), потом на грузы и перпендикулярные расстояния направле-

ний сил от оси, статические моменты (да Винчи, Убальди), потом на грузы и величины перемещений (Галилей) и, наконец, на грузы и направления сил относительно оси (Вариньон); во всех этих моментах усматривали условия, определяющие равновесие рычага, и отсюда выводили правила равновесия.

3. Человек, делающий подобного рода новое наблюдение и выставляющий новое правило, обыкновенно знает, что, пытаясь *воспроизвести* в представлениях и понятиях какой-нибудь факт, чтоб иметь этот образ всегда под рукою там, где сам факт всецело или отчасти недоступен, можно впасть и в заблуждение. И действительно, обстоятельства, на которые приходится обращать внимание, сопровождаются таким множеством других побочных обстоятельств, что часто трудно бывает выбрать и принять во внимание именно те, которые имеют существенное значение для поставленной цели. Стоит вспомнить, например, трение, недостаточную гибкость веревок и т. д. в машинах — моменты, затемняющие и спутывающие исследование одних существенных условий. Нет поэтому ничего удивительного, когда какой-нибудь изобретатель или автор нового правила, не доверяя себе самому, ищет *доказательства* правила, в верности которого, как ему кажется, он убедился. Он не верит сейчас правилу или верит ему лишь отчасти. Так, например, Архимед сомневается в том, что грузы действуют *пропорционально* плечам рычага, но совсем не сомневается во влиянии этих плеч *вообще*. Даниель Бернулли не сомневается во влиянии направления сил вообще, а сомневается только в способе этого влияния и т. д. И действительно, гораздо легче наблюдать, что какое-нибудь условие имеет в данном случае влияние *вообще*, чем констатировать, *каково* это влияние. При исследовании последнего рода ошибки гораздо более возможны. Таким образом, поведение исследователей вполне естественно и основательно.

Верность какого-нибудь нового правила может быть доказана тем, что его часто применяют, сравнивают с данными опыта и *испытывают* при самых различных условиях. Этот процесс совершается *с течением времени* сам собою. Но человек, делающий открытие, желает быстрее прийти к своей цели. Он сравнивает результат своего правила со всеми знакомыми ему данными опыта, со всеми прежними правилами, многократно уже испытанными, и ищет противоречие. Наибольший авторитет признается при этом, естественно, за наиболее старыми, наиболее привычными данными опыта, за правилами наиболее испытанными. Среди же этих данных опыта особое место занимают данные *инстинк-*

тивные, полученные без всякого личного содействия, исключительно под действием и давлением накопляющихся фактов, что опять-таки вполне основательно именно там, где дело идет об исключении субъективного произвола и личных ошибок.

Именно указанным здесь способом Архимед *доказывает* свой закон рычага, Стевин — свой закон наклонного давления, Даниель Бернулли — параллелограмм сил, Лагранж — принцип возможных перемещений. Только один Галилей вполне ясно сознает по поводу последнего принципа, что новое его наблюдение и замечание не хуже всякого другого из *прежних*, что источником их является *тот же* опыт. Он даже не ищет доказательств. Архимед пользуется для доказательства знаниями относительно центра тяжести, которые он сам уже вывел при помощи правила рычага, но которые были, вероятно, и, с другой стороны, настолько ему знакомы и привычны, как старые данные опыта, что он совсем не сомневался в них и, может быть, даже не замечал, что он пользуется ими для доказательства. В соответствующем месте мы подробно уже останавливались и на инстинктивных элементах в рассуждениях Архимеда и Стевина.

4. Вполне естественно то, что в случае нового открытия прибегают ко всем средствам, которые могли бы послужить для проверки нового правила. Но после того как по истечении соответствующего времени правило это было достаточно испробовано непосредственно, науке приличествует признать, что другое доказательство стало совершенно излишним, что нет никакого смысла считать правило более надежным в том случае, когда оно опирается на другие правила, полученные (немного только раньше) тем же самым путем наблюдения, что обдуманное и испытанное наблюдение не хуже других. В настоящее время мы можем считать, что принцип рычага, статические моменты, принцип наклонной плоскости, принцип возможных перемещений, параллелограмм сил — все покоятся на *равноценных* наблюдениях. *В настоящее время* не имеет никакого значения, что одни открытия были сделаны непосредственно, а другие — окольными путями и по случаю других наблюдений. *Признавать* ли какой-нибудь принцип, как например статических моментов, прямым ключом к пониманию *всех* фактов какой-нибудь области, видеть *все* эти факты духовно *проникнутыми* этим принципом или раздирать его на части, прибегать к незначительным правилам, *случайно* нам знакомым уже и содержащим этот принцип, чтобы с их помощью его доказать? Экономии мышления и эстетике

науки гораздо более соответствует первое, чем второе. Этот процесс может наука и индивидуум (при историческом изучении) проделать лишь *однажды*. Но оба они должны впоследствии становиться на точку зрения более свободную.

5. В действительности эта жажда доказательств в науке ведет к *ложной и неосновательной строгости*. Некоторые правила признаются более надежными и рассматриваются, как необходимые и неоспоримые основы для других, между тем как в действительности они столь же, а порой и менее надежды, чем эти. Здесь не достигается именно уяснение той степени надежности, к которой *строгая* наука так стремится. Таких примеров ложной строгости можно найти почти в каждом учебнике. От нее страдают выводы Архимеда, если отвлечься от исторического их значения. Но самый разительный пример представляет Даниель Бернулли со своим выводом параллелограмма сил (Comment. Acad. Petrop. T. I).

6. Мы говорили уже, что познания, приобретенные инстинктивно, пользуются совсем особым доверием. Мы не знаем более, *как* мы их приобрели, и потому не можем ничего возразить против способа их приобретения. Мы ничего не сделали для их зарождения. Они обладают для нас такой силой, которой никогда не бывает у результата произвольного, обдуманного опыта, когда мы всегда чувствуем наше вмешательство. Они представляются нам, как нечто, свободное от субъективности, чуждое нам, но находящееся всегда под рукою и более для нас очевидное, чем отдельные факты природы.

Все это порой приводило к тому, что этого рода познания выводились из совершенно другого источника и рассматривались даже, как нечто, существующее a priori (до всякого опыта). Что этот взгляд неправилен, мы подробно доказали при обсуждении работ Стевина. Но и авторитет таких инстинктивных познаний, как бы велико ни было их значение для процессов развития, должен, наконец, уступить свое место авторитету ясного и с намерением наблюденного принципа. И инстинктивные познания суть познания опытные и, как мы указывали на это уже выше, могут оказаться совершенно недостаточными и бесплодными при внезапном открытии новой области опыта.

7. *Истинное* соотношение различных принципов есть соотношение *историческое*. Один охватывает больше в одной, а другой — в другой области. Пусть такой принцип, как принцип возможных перемещений, легко обобщает гораздо большее число различных случаев, чем осталь-

ные принципы. Тем не менее нельзя поручиться, что он навсегда останется впереди и что не будет заменен другим, новым и лучшим. Все принципы более или менее произвольно выдвигают то одни, то другие стороны тех же фактов и содержат набросок правила для воспроизведения фактов в мыслях. Никогда нельзя утверждать того, что этот процесс совершенно удался и что он вполне завершен. Кто придерживается этой точки зрения, не будет мешать прогрессу науки.

8. Бросим, наконец, еще раз взгляд на статическое понятие силы. Сила есть нечто, что сопровождается движением. Несколько таких условий, из которых каждое, взятое в отдельности, сопровождается движением, могут *вместе* существовать и без движения. Статика же именно и исследует необходимую для этого зависимость этих условий друг от друга. Особенностями движения, обусловленного какой-нибудь силой, статика не интересуется более. Определяющие движение условия, наиболее нам знакомые, суть собственные наши акты воли, иннервации. При движениях, которые мы сами определяем, как и при тех, к которым мы бываем вынуждены внешними обстоятельствами, мы всегда ощущаем некоторое давление. Вследствие этого устанавливается привычка каждое условие, определяющее движение, представлять себе, как нечто родственное акту воли, и как *давление*. Попытки устранить это представление, как субъективное, анимистическое, не научное, всегда оканчивались неудачей. Неполезно также делать насилие над собственной своей естественной мыслью и добровольно обрекать себя на бедность ее. Ниже мы заметим, что и в обосновании динамики это воззрение играет тоже известную роль.

Определяющие движение условия, встречающиеся в природе, можно во многих случаях заменить нашими иннервациями и тем самым получить представление о различной интенсивности сил. Но при оценке этой интенсивности мы можем пользоваться только нашей памятью и нашего ощущения сообщить другим не можем. Так как однако мы можем каждое условие, определяющее движение, представить и через какой-нибудь груз, то мы и приходим к познанию, что все определяющие движение условия (силы) однородны и могут быть замещены и измеряться тяжестями. При исследовании механических процессов поддающийся измерению вес служит нам подобную же службу в качестве надежного, удобного и поддающегося сообщению признака, как термометр, точным образом представляющий наше ощущение теплоты при изучении процессов теплоты. Как мы заметили уже выше, статика

не может отвлечься от всякого знания процессов движения. Обнаруживается это особенно ясно при определении направления силы посредством направления движения, обусловленного силой, если она существует одна. Точкой приложения мы можем признать ту точку тела, движение которой и тогда еще определяется силой, когда она освобождена от своих связей с другими точками тела.

Итак, сила есть определяющее движение условие, признаки которого могут быть указаны следующим образом. Направление силы есть направление движения, определенного только данной силой. Точка приложения есть та точка, движение которой бывает определенным и независимо от ее связей. Величина силы есть тот груз, который, действуя в определенном направлении (посредством веревки) и будучи приложен к данной точке, определяет то же самое движение или вызывает то же самое равновесие. Что касается остальных условий, которые видоизменяют движение, но одни не могут определить того, каковы возможные перемещения, плечи рычага и т. д., то они могут быть названы побочными условиями, определяющими движение или равновесие. (См. приложение, добавление 2.)

6. Принципы статики в их применении к жидким телам

1. Изучение жидких тел не внесло в статику много существенно новых точек зрения, но зато здесь было найдено множество применений и подтверждений принципов уже известных и физический опыт, благодаря этим исследованиям, весьма обогатился. Мы посвятим этому предмету несколько страниц.

2. И в области статики жидкостей первое начало научному исследованию было положено Архимедом. Ему мы обязаны известным правилом о давлении снизу вверх (или потере веса), испытываемому погруженными в жидкость телами. Об открытии этого правила Ветрувий в своей книге «De architectura. Lib. 9» сообщает следующее:

«Из множества чудесных и разнообразных, как и бесконечно остроумных открытий Архимеда я упомяну только о тех, открытие которых обнаруживает особенно чрезвычайный ум. Достигнув королевской власти, Герон пожелал принести какой-то святыне золотой венок, который он обещал последней за свои счастливые дела. Он заказал этот венок за известную плату и точно отвесил мастеру необходимое для

того золото. Тот изготовил венок и в назначенное время принес его королю, который остался им очень доволен; вес венка тоже, казалось, был надлежащим.

Впоследствии королю был сделан донос, что часть золота была уворована и заменена таким же количеством серебра. Взволнованный обманом, Герон, не найдя средства для доказательства происшедшего воровства, поручил Архимеду найти такой способ. Занятый мыслью об этом, Архимед однажды пришел в баню. Опустившись в ванну, он заметил, что вода выливается из ванны по мере того, как он в нее опускается. Догадавшись о причине этого явления, он, не теряя ни минуты, выпрыгнул из ванны и голый побежал домой громко крича, что нашел, что искал. Он кричал по-гречески: «*ἑύρηκα*» («я нашел»)».

3. Наблюдение, приведшее Архимеда к его правилу, заключалось, следовательно, в том, что опущенное в воду тело должно поднять соответствующее количество воды, как раз так, как если бы это тело находилось на одной чашке весов, а вытесненная вода на другой чашке. Это воззрение, являющееся и в настоящее еще время самым естественным, прямым, ясно выступает и в сочинениях Архимеда «О плавающих телах», к сожалению, не дошедших до нас в полном виде и отчасти восстановленных Ф. Коммандинусом.

Предположение, из которого исходит Архимед, гласит:

«Следует принять в качестве существенного свойства жидкости, что при равномерном и непрерывном положении ее частей часть, которая находится под меньшим давлением, толкается вверх частью, находящейся под большим давлением. Но каждая часть жидкости находится под давлением жидкости, находящейся над ней в вертикальном направлении, когда эта последняя опускается или, по крайней мере, находится под давлением другой жидкости».

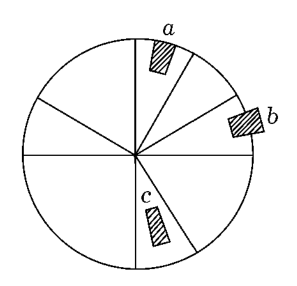


Рис. 59

Короче говоря, Архимед представляет себе весь земной шар жидким и вырезает из него пирамиды, вершины которых находятся в центре шара. В случае равновесия все эти пирамиды должны быть равного веса, и части их, имеющие то же положение, должны испытывать равное давление. Если в одну из этих пирамид опустить тело a того же удельного веса, что и вода, то оно совершенно в нее погрузится и в случае равновесия будет собственным своим

давлением представлять давление вытесненной воды. Тело b меньшего удельного веса должно погрузиться, не нарушая равновесия, лишь настолько, чтобы вода под ним испытывала от веса тела такое же давление, какое она испытывала бы, если бы вместо него оставалась вода. Тело c большого удельного веса опускается так глубоко, как оно может. Чтобы убедиться в том, что в воде вес его уменьшился на вес вытесненной воды, достаточно представить себе это тело связанным с другим телом меньшего удельного веса так, чтобы получилось тело удельного веса воды, которое и погрузится в ней совершенно.

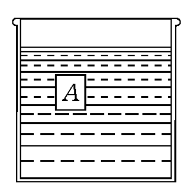


Рис. 60

4. Когда в 16 столетии снова вернулись к изучению работ Архимеда, эти положения едва были поняты. Вполне понять эти выводы было в то время невозможно.

Стевин нашел собственным своим путем важнейшие законы гидростатики, как и их выводы. К своим плодотворным выводам Стевин приходит, исходя главным образом из 2-х основных идей. Первая очень схожа с идеей относительно замкнутой цепи. Вторая заключается в допущении, что отвердение жидкости, находящейся в состоянии равновесия, этого равновесия не нарушает.

Сначала Стевин выставляет следующее положение: какое-нибудь произвольное данное количество воды A, будучи погружено в воду, остается в состоянии равновесия. Если бы A не удерживалось в окружающей ее воде, а положим, опускалось бы, то мы должны были бы принять, что занимающая место A вода опускалась бы таким же образом. Это допущение ведет, следовательно, к непрерывному движению, к perpetuum mobile, что противоречит нашему опыту и нашему инстинктивному познанию.

Итак, будучи погружена в воду, вода теряет весь свой вес. Представим же себе теперь поверхность погруженной воды отвердевшей. Представим себе поверхностный сосуд (vas superficiarium), как выражается Стевин; давление останется здесь тем же самым. *Пустой* поверхностный сосуд будет испытывать в жидкости давление вверх, равное весу вытесненной жидкости. Если мы наполним этот сосуд каким-нибудь другим телом произвольного удельного веса, мы заметим уменьшение веса тела на вес вытесненной жидкости в момент погружения.

В прямоугольном сосуде в форме параллелепипеда с вертикальными стенками, наполненном жидкостью, давление на горизонтальное ос-

нование равно весу жидкости. Давление это остается тем же самым для всех частей основания равной поверхности. Стевин представляет себе произвольные части жидкости удаленными и на их место — твердые тела того же удельного веса или — что то же самое — он представляет себе часть жидкости отвердевшей; давление при этом не меняется. Но тогда не трудно усмотреть независимость давления на дно сосуда от формы его, законы давления в сообщающихся сосудах и т. д.

5. Галилей исследует условия равновесия жидкостей в сообщающихся сосудах и другие связанные с этим вопросы с помощью принципа возможных перемещений. Пусть NN есть общий уровень находящейся в равновесии жидкости в двух сообщающихся сосудах; существующее здесь равновесие он объясняет тем, что в случае нарушения равновесия перемещения столбов жидкости обратно пропорциональны поперечным сечениям и весам столбов; другими словами, условия равновесия здесь те же, как и в машинах. Но это не совсем правильно. Настоящий случай не соответствует вполне точно исследуемым Галилеем случаям равновесия в машинах с их безразличным равновесием. В случае жидкости в двух сообщающихся сосудах каждое нарушение общего уровня жидкости вызывает возвышение центра тяжести. В случае, изображенном на рис. 61, центр тяжести S жидкости, вытесненной из A, поднимается в S', между тем как остальную жидкость можно считать остающейся в покое. Центр тяжести, следовательно, в случае равновесия находится всего ниже.

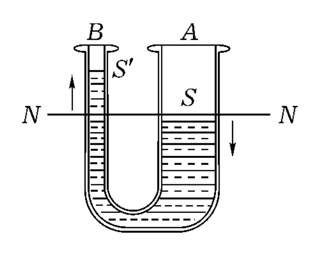
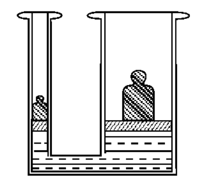


Рис. 61

6. Паскаль тоже пользуется принципом возможных перемещений, но более правильным образом: он не принимает во внимание веса жидкости, а рассматривает только поверхностное давление. Представим себе два сообщающихся сосуда, в которых двигаются поршни; пусть на этих поршнях лежат грузы, пропорциональные их площадям. Здесь будет существовать равновесие потому, что вследствие неизменяемости объема жидкости при каждом нарушении перемещения будут обратно пропорциональны весам. Паскаль, следовательно, ***выводит*** из принципа возможных перемещений, что в случае равновесия каждое давление на какую-нибудь часть поверхности жидкости пере-


Рис. 62

дается на каждую другую часть, равную, но произвольно ориентированную, с равной величиной. Нельзя ничего возразить против того, что этим путем закон *найден*. Мы увидим однако, что более естественным и более удовлетворительным воззрением будет рассматривать этот закон как непосредственно данный.

7. После этого исторического очерка рассмотрим еще раз важнейшие случаи равновесия жидкостей, пользуясь при этом различными, смотря по удобству, точками зрения.

Основное свойство жидкости, данное нам в опыте, заключается в перемещаемости ее частей под действием даже самых малых давлений. Представим себе элемент объема жидкости, веса которого мы можем не принимать во внимание, небольшой кубик, например. Если на одну из его поверхностей будет действовать слабейший излишек давления, жидкость, поддавшись ему, будет выступать по всем направлениям через его остальные пять поверхностей. Твердый кубик может испытывать на верхней и нижней поверхности другое давление, чем на боковых поверхностях. Другое дело — жидкий кубик: он может существовать только тогда, когда давление, нормальное к его поверхностям, остается везде одним и тем же. Подобное же соображение может быть приведено и по поводу каждого другого многогранника. В этом геометрически проясненном представлении не заключается ничего, кроме грубого опыта, что частицы жидкости поддаются малейшему давлению и что они сохраняют это свойство и внутри жидкости, когда эта последняя находится под высоким давлением: тяжелые тельца, например, как бы они ни были малы, продолжают в ней опускаться и т. д.

С перемещаемостью частичек связано у жидкостей еще другое свойство. Давление вызывает в них уменьшение объема, пропорциональное давлению на единицу поверхности. Каждое изменение давления сопровождается пропорциональным изменением объема и плотности жидкости. Если давление уменьшается, то объем опять увеличивается, а плотность опять уменьшается. Таким образом, в случае приращения давления объем жидкости уменьшается до тех пор, пока развившаяся упругость не уравновешивает приращение давления.

8. Более древние исследователи, например, исследователи Флорентинской Академии, полагали, что жидкости вообще не сжимаемы. Только в 1763 г. Джон Кантон описал опыт, доказывающий сжимаемость воды. Сосуд наподобие термометра наполняется водой, нагревается до кипения последней и затем запаивается. Жидкость достигает до a. Так

как над a пустое пространство, то она не подвержена давлению воздуха. Если припаянный конец отломать, жидкость опускается до b. Но только часть перемещения зависит от сжатия воды под давлением атмосферы. Если перед тем как отломать запаянный конец, поместить сосуд под воздушный насос и выкачать воздух, жидкость упадет до c. Это происходить оттого, что исчезает давление на сосуд, которое уменьшает его емкость.

Когда отламывается конец, это внешнее давление атмосферы компенсируется внутренним давлением и емкость сосуда опять увеличивается. Следовательно, часть cb соответствует исключительно сжатию жидкости под действием атмосферного давления.

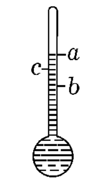


Рис. 63

Эрстед первый произвел более точные опыты для определения сжимаемости воды, применив для этого очень остроумный метод. Сосуд наподобие термометра A наполнен прокипяченной водой и опущен открытой капиллярной трубкой в ртуть. Рядом с ним находится манометрическая трубка B, наполненная воздухом и тоже погруженная открытым концом в ртуть. Весь аппарат помещен в сосуд, наполненный водой, и с помощью насоса в нем сжат воздух. При этом вода в сосуде A тоже сжимается, и уровень ртути, поднявшись в капиллярной трубке, указывает на это сжатие. Изменение емкости, испытываемое еще сосудом A, обязано своим происхождением только сжатию со всех сторон стенок сосуда.

Самые точные опыты в этой области были произведены Грасси с аппаратом, сконструированным Реньо, и вычислены с помощью формул с поправками Ламэ. Чтобы дать наглядную картину сжимаемости воды, заметим, что для (прокипяченной) воды при 0° Грасси нашел при приращении давления на одну атмосферу уменьшение первоначального объема на 5 стотысячных долей. Таким образом, если сосуд A имеет объем в один литр (1000 см^3), а поперечное сечение капиллярной трубки равно 1 мм^2, то при давлении в одну атмосферу уровень ртути поднимается на пять сантиметров.

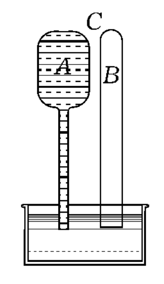


Рис. 64

9. Итак, поверхностное давление сопровождается физическим изменением (изменением плотности) жидкости, которая и может быть констатирована при достаточно тонких средствах (например, оптических). Мы всегда должны представлять себе, что час-

ти жидкости, находящиеся под более сильным давлением, более плотны (хотя и на незначительную величину), чем части, находящиеся под давлением более слабым.

Представим себе теперь, что в какой-нибудь жидкости (внутри которой не действуют никакие силы, от тяжести которой мы, следовательно, отвлекаемся) соприкасаются друг с другом две части, находящиеся под неравными давлениями. Часть, находящаяся под более сильным давлением и более плотная, будет расширяться и сжимать вторую до тех пор, пока сила упругости на разделяющей их поверхности, с одной стороны ослабляющаяся, а с другой — усиливающаяся, не восстановит между ними равновесия и обе части будут одинаково сжаты.

Попробуем теперь настолько количественно уяснить наше представление об обоих фактах, легкой перемещаемости и сжимаемости частей жидкости, чтобы оно находилось в полном согласии с самыми различными данными опыта. Мы придем тогда к следующему положению: в жидкости (внутри которой не действуют никакие силы, от тяжести которой мы отвлекаемся) в случае равновесия приходится на каждый произвольно расположенный (ориентированный) равный элемент поверхности равное давление. Давление, следовательно, во всех точках одинаково и не зависит от направления.

Особые эксперименты для доказательства этого положения нигде не были произведены с необходимой точностью. Но опыт над жидкостями делает правильность его весьма вероятной и находит в нем легкое объяснение.

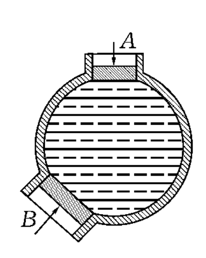


Рис. 65

10. Пусть жидкость замкнута в сосуде, снабженном поршнем A, поперечное сечение которого равно единице поверхности. Пусть на этот поршень давит груз p и пусть поршень B укреплен неподвижно. Если отвлечься от тяжести жидкости, то в сосуде существует везде одно и то же давление p. Поршень проникает в сосуд так глубоко и стенки сосуда настолько деформируются, что силы упругости твердого и жидкого тела уравновешивают друг друга. Если представить себе, что поршень B, поперечное сечение которого равно f, подвижен, то давление $f \cdot p$ удержит его в состоянии равновесия.

Если Паскаль выводит приведенное выше положение из принципа возможных перемещений, то следует заметить, что найденное им

отношение перемещений обусловлено только легкой перемещаемостью частей жидкости и равенством давления во всех ее частях. Если бы в одной части жидкости могло иметь место более сильное сжатие, чем в другой, то отношение перемещений было бы нарушено и вывод Паскаля был бы неприемлем. Без равенства давления, как свойства уже данного, обойтись нельзя. К той же мысли мы приходим, если вспомним, что и в газах, где о постоянном объеме, хотя бы и приблизительном, не может быть и речи, существует тот же закон, который Паскаль выводит для капельно-жидких тел. Для нашего взгляда это обстоятельство затруднения не представляет, но оно представляет такое затруднение для взгляда Паскаля. Между прочим и в рычаге отношение возможных перемещений обеспечивается силами упругости тела рычага, которые сильного отклонения от этого отношения не допускают.

11. Обратимся теперь к рассмотрению свойств жидкостей под влиянием тяжести. Поверхность жидкости в случае равновесия горизонтальна NN. Это легко понять, если принять во внимание, что каждое изменение этой поверхности поднимает центр тяжести жидкости, переносит массу из пространства ниже NN с центром тяжести S в пространство выше NN с центром тяжести S'. Этому изменению, следовательно, препятствует тяжесть.

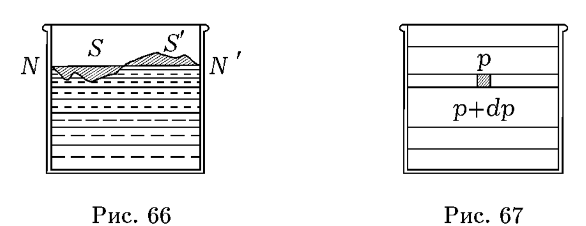


Рис. 66 Рис. 67

Пусть тяжелая жидкость с горизонтальной поверхностью находится в сосуде в равновесии. Рассмотрим небольшой прямоугольный параллелепипед внутри этой жидкости. Пусть горизонтальная нижняя поверхность его равна α, а вертикальные грани имеют длину dh. Вес параллелепипеда равен, следовательно, $\alpha \cdot s \cdot dh$, где s есть удельный вес. Если параллелепипед не падает вниз, то это возможно только потому, что на нижнюю поверхность собственное давление жидкости больше, чем на верхнюю. Обозначим давление на верхнюю поверхность через αp, а давление на нижнюю поверхность — через $\alpha(p+dp)$. Равнове-

сие существует, когда $\alpha \cdot s \cdot dh = \alpha \cdot dp$ или $\frac{dp}{dh} = s$, причем положительным считается направление вниз. Очевидно, что при равных приращениях h вертикально вниз получает равные приращения и давление p. Мы имеем, что $p = h \cdot s + q$ и, когда q, т.е. давление на свободную верхнюю поверхность (соответствующее обыкновенно атмосферному давлению) $= 0$, то еще проще $p = hs$, т.е. давление пропорционально вертикальной длине под уровнем жидкости. Если представить себе, что жидкость влита, а это соотношение еще не достигнуто, то каждая частичка жидкости будет немного падать, покуда находящаяся под ней сжатая частичка своей упругостью не уравновесит тяжесть верхней частички.

Из приведенного рассуждения ясно также, что давление в жидкости возрастает только в том направлении, в котором действует сила тяжести. Только на нижней поверхности параллелепипеда упругий излишек давления лежащей ниже жидкости должен уравновесить тяжесть параллелепипеда. Но по обеим сторонам вертикальной предельной поверхности параллелепипеда жидкость одинаково сжата, так как в предельной поверхности не действует такая сила, которая обусловливала бы более сильное сжатие на одной стороне.

Сумма всех точек жидкости, соответствующих одному и тому же давлению p, образует поверхность, которая называется поверхностью уровня. Если переместить частичку в направлении силы тяжести, давление в ней изменится. Если переместить ее в направлении, перпендикулярном к направлению силы тяжести, давление не изменяется. В последнем случае точка остается в той же поверхности уровня, так что элемент этой поверхности перпендикулярен и к направлению силы тяжести.

Если мы представим себе земной шар круглым и жидким, то поверхности уровня будут концентрическими шарами, а направления сил тяжести (радиусы) будут перпендикулярны к элементам шаровых поверхностей. Аналогичные замечания можно было бы сделать, если бы вместо силы тяжести на частицы жидкости действовали другие силы, как магнитные, например.

Поверхности уровня в известной степени указывают на соотношения сил, действующих в жидкости, и эта точка зрения развивается далее в аналитической гидростатики.

12. Рост давления с удалением от уровня тяжелой жидкости можно наглядно представить при помощи нескольких экспериментов, в боль-

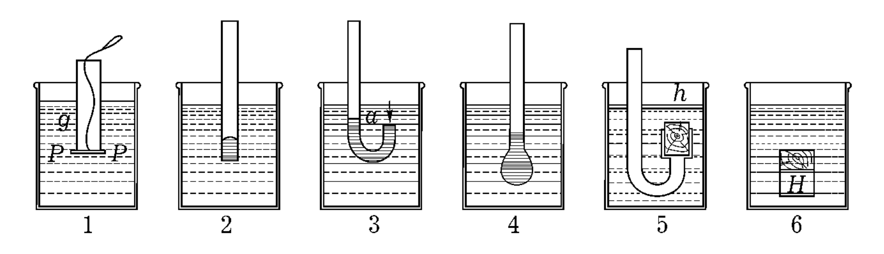


Рис. 68

шинстве своем исходящих от Паскаля. При этом, кстати, можно убедиться в независимости давления от направления. Пустая стеклянная трубка g с отшлифованными краями внизу, закрытая металлической пластинкой pp и опущенная в воду, изображена в 1. Если опустить ее на достаточную глубину, можно выпустить из рук нитку и пластинка, поддерживаемая давлением жидкости, не упадет. В 2 место пластинки занимает столбик ртути. Если опустить в воду открытую сифонную трубку, наполненную ртутью, как это изображено в 3, то давление заставит ртуть подняться в более длинном колене трубки. В 4 изображена трубка, закрытая внизу кожей и наполненная ртутью. Чем ниже опустить трубку в жидкость, тем ртуть поднимается выше. Деревянный брусок h (5) давлением воды перегоняется в более короткое колено пустой сифонной трубки. Деревянный брусок H остается под ртутью на дне сосуда и прижимается к ней до тех пор, покуда ртуть не проникает под него.

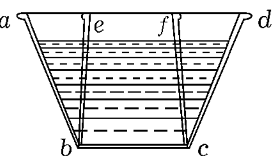


Рис. 69

13. Уяснив себе, что давление внутри тяжелой жидкости пропорционально глубине под уровнем ее, не трудно заметить независимость давления на дно сосуда от формы этого последнего. Давление вниз возрастает в равной мере, безразлично, имеет ли сосуд форму $abcd$ или $ebcf$. В обоих случаях стенки сосуда, соприкасаясь с жидкостью, настолько деформируются, что они своей упругостью уравновешивают давление жидкости и, следовательно, заменяют давление соприкасающейся жидкости. Этим прямо оправдывается фикция Стевина отвердевшей жидкости, заменяющей стенки сосуда. Давлением на дно сосуда остается, как и раньше, $P = Ahs$, где A означает поверхность дна, h — расстояние горизонтального плоского дна от уровня жидкости и s — ее удельный вес.

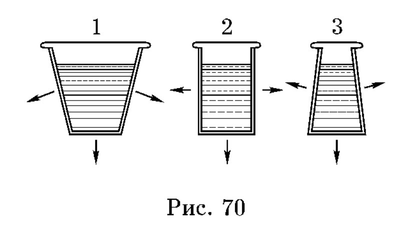


Рис. 70

То, что сосуды 1, 2, 3 при равной поверхности дна и равной высоте давления (независимо от стенок сосуда) обнаруживают на весах неравный вес жидкости, приведенным законам давления, конечно, не противоречит. Если принимать во внимание еще боковое давление, то в 1 сосуде мы получаем еще одно давление вниз, а в 3 еще одно давление вверх, так что и здесь результирующее поверхностное давление тоже равно весу жидкости.

14. Принцип возможных перемещений весьма удобен для полного уяснения подобного рода случаев, вследствие чего мы и будем им пользоваться. Но предварительно нам нужно заметить следующее. Если груз q падает из 1 в 2 в то время, как груз равной величины опускается из 2 в 3, то совершенная при этом работа равна $qh_1 + qh_2 = q(h_1 + h_2)$;

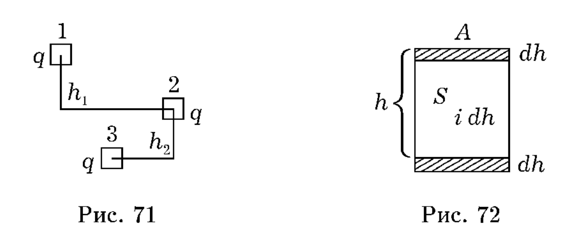


Рис. 71 Рис. 72

другими словами, работа здесь та же самая, какая была бы совершена, если бы груз q прямо переместился из 1 в 3, а груз в 2 оставался бы на своем месте. Замечание это легко обобщить.

Рассмотрим однородный тяжелый прямоугольный параллелепипед с вертикальными краями длины h, основанием A и удельного веса s. Пусть тело это (или его центр тяжести) падает на dh. Работа тогда равна $Ahs \cdot dh$ или также $Adh \cdot s \cdot h$. При первом выражении мы представляем себе, что весь вес Ahs переместился на длину dh, а при втором выражении, что вес $Adhs$ переместился из верхнего заштрихованного пространства в нижнее на высоту h, а на остальное тело мы не обращаем внимания. Обе точки зрения одинаково допустимы и равнозначны.

15. С помощью этого замечания мы можем ясно понять следующий найденный Паскалем парадокс. Сосуд g укреплен на особом штативе и состоит из одного узкого верхнего и одного весьма широкого нижнего цилиндра. Нижнее дно замкнуто подвижным поршнем, который с по-

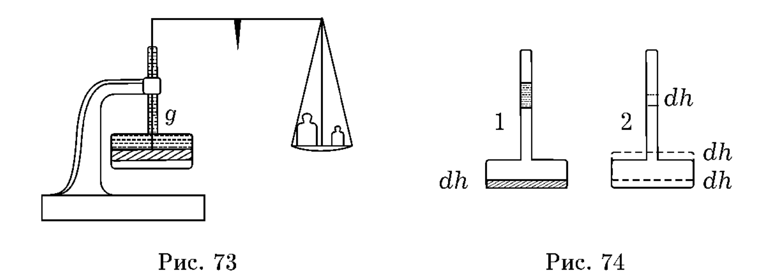


Рис. 73 Рис. 74

мощью нити, проходящей через ось цилиндра, подвешен на весах. Если сосуд наполнить водой, то, несмотря на небольшое количество этой воды, приходится на другую чашку весов положить значительные грузы для равновесия; уравновешивающий груз имеет вес равный Ahs, где A есть поверхность дна, h — высота жидкости и s — ее удельный вес. Если жидкость замерзает и отделяется от стенок сосуда, то для получения равновесия сейчас же становится достаточным весьма малый груз.

Рассмотрим возможные перемещения в обоих случаях (рис. 74). В первом случае при поднятии поршня на dh возможный момент равен $Adhs \cdot h$ или $Ahs \cdot dh$; это тот же момент, который мы получили бы, если бы вытесненная поршнем масса поднялась на всю высоту до уровня жидкости или если бы весь груз Ahs поднялся на dh. Во втором случае вытесненная поршнем масса не поднимается до уровня, а испытывает гораздо меньшее перемещение, именно перемещение поршня. Если A — поперечные сечения широкого и узкого цилиндра, k, l — соответствующие высоты, то получающийся возможный момент равен $Adhs \cdot k + adhs \cdot l = (Ak + al)s \cdot dh$; он соответствует, следовательно, поднятию гораздо меньшего груза $(Ak + al)s$ на высоту dh.

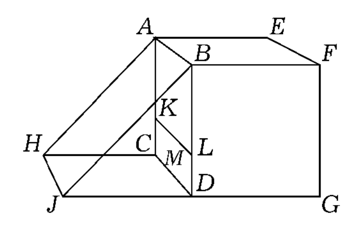


Рис. 75

16. Законы бокового давления жидкостей отличаются лишь ничтожными видоизменениями от законов давления на дно сосуда. Если у нас, например, сосуд кубической формы со стороной, равной одному дециметру, т. е. сосуд объемом в один литр, то при полном наполнении его водой давление на вертикальную боковую стенку $ABCD$ получить очень легко. Чем ниже элемент стенки под уровнем жидкости, тем большее давление он испытывает. Легко заметить, что давление здесь то же самое, какое

было бы, если бы водяной клин $ABCDHI$ покоился на горизонтальной стенке, причем $ID \perp BD$ и $ID = HC = AC$. Боковое давление равно, следовательно, половине килограмма.

Чтобы получить точку приложения результирующего давления, мы снова представим себе $ABCD$ в виде горизонтальной стенки с покоящимся на ней водяным клином. Вырежем $AK = BL = {}^2/_3 AC$, проведем прямую KL и разделим ее пополам в точке M, которая и будет искомой точкой приложения, ибо через нее проходит вертикальная линия, проходящая через центр тяжести водяного клина.

Наклонную плоскую фигуру, образующую дно наполненного жидкостью сосуда, мы разделяем на элементы α, α', α'', ... с расстояниями h, h', h'', ... от уровня жидкости. Давление на дно сосуда будет

$$(\alpha h + \alpha' h' + \alpha' h' + \cdots)s.$$

Если обозначим через A общую поверхность и через H расстояние ее центра тяжести от уровня жидкости, то

$$\frac{\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' + \cdots}{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \cdots} = \frac{\alpha h + \alpha' h' + \cdots}{A} = H$$

и, следовательно, давление на дно сосуда будет AHs.

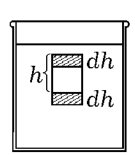


Рис. 76

17. Принцип Архимеда может быть выведен самым различным образом. По примеру Стевина, представим себе часть жидкости внутри ее отвердевшей. Пусть эта отвердевшая часть плавает, как и раньше, в окружающей ее жидкости. Равнодействующая всех сил поверхностного давления действует, следовательно, в центре тяжести вытесненной твердым телом жидкости в направлении, противоположном ее весу, и равна ему. Если мы теперь на место отвердевшей жидкости поместим какое-нибудь другое твердое тело той же формы, но другого удельного веса, то силы поверхностного давления останутся одни и те же. На тело, следовательно, действуют две силы: вес тела, действующий в центре тяжести, и давление вверх, равнодействующая сил поверхностного давления, с точкой приложения в центре тяжести вытесненной жидкости. Только в случае однородных твердых тел оба центра тяжести совпадают.

Погрузим прямоугольный параллелепипед с высотой h и основанием α с вертикальными краями в жидкость удельного веса s. Если расстояние верхнего основания параллелепипеда от уровня жидкости

равно k, то давление на это основание равно αks, а на нижнее основание $\alpha(k+h)s$. Так как силы бокового давления компенсируют друг друга, то остается давление вверх αhs или $v \cdot s$, где v есть объем параллелепипеда.

С помощью принципа возможных перемещений мы всего ближе подходим к той точке зрения, из которой исходил сам Архимед. Пусть параллелепипед удельного веса σ основания a и высоты h опускается на dh. Возможный момент перемещения из верхнего заштрихованного места в нижнее равен $a \cdot dh \cdot \sigma h$. Зато жидкость поднимается из нижнего места в верхнее и момент ее равен $a \cdot dh \cdot sh$. Таким образом, весь возможный момент равен $ah(\sigma - s)dh = (p-q)dh$, где p означает вес тела, а q — вес вытесненной жидкости.

18. Может возникнуть следующий вопрос: изменяется ли давление вверх на какое-нибудь тело в жидкости, если эту последнюю погрузить в другую жидкость? Таковой вопрос действительно ставили. Итак, пусть тело k погружено в жидкость A и эта последняя в свою очередь вместе со своим сосудом — в жидкость B. Если при определении потери веса в A должна была бы быть принята во внимание потеря в весе жидкости A в жидкости B, то потеря в весе тела k должна была бы совершенно исчезнуть в том случае, когда жидкость B тождественна с жидкостью A. Другими словами, тело k, погруженное в жидкость A, теряло бы в весе и не теряло бы. Очевидно, что такого рода правило не имеет никакого смысла.

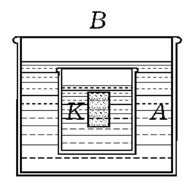


Рис. 77

С помощью принципа возможных перемещений более сложные случаи такого рода обозреть очень легко. Если тело постепенно погружается сначала в B, а потом частью в B и в A и, наконец, только в A, то (с точки зрения возможных моментов) во втором случае имеют существенное значение в зависимости от погруженного в них объема обе жидкости. Но когда тело всецело погружено в A, то при дальнейшем его перемещении уровень жидкости A не поднимается более и жидкость B значения поэтому не имеет.

19. Принцип Архимеда может быть наглядно проиллюстрирован в следующем прекрасном опыте. На одной стороне весов (рис. 78) подвешивают полый куб H и под ним другой массивный куб M, как раз помещающийся в первом, и приводят весы в равновесие. Если погрузить куб M в воду, приподнимая стоящий под ним сосуд с водой, равно-

весие нарушается, но оно тотчас же восстанавливается, если наполнить водой куб H.

Противоположный опыт заключается в следующем. На одной стороне весов остается куб H. На другую чашу весов помещается сосуд с водой, над которым на особом штативе, не связанном с весами, подвешивается на тонкой нити куб M. На весах устанавливается равновесие. Если теперь опустить куб M так, чтобы он погрузился в воду, равновесие снова нарушается и, чтобы восстановить его, достаточно наполнить водой куб H.

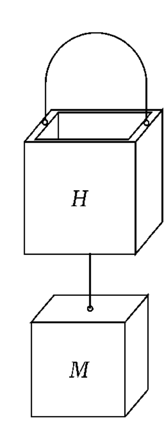


Рис. 78

С первого взгляда этот опыт кажется парадоксом. Но прежде всего инстинктивно чувствуется, что нельзя погружать куб M в воду, не производя давления, которое должно оказывать влияние на весы. Если еще принять во внимание, что уровень воды в сосуде поднимается и что твердое тело M как раз уравновешивает поверхностное давление окружающей воды, т. е., следовательно, представляет и замещает равный объем воды, то всякая парадоксальность опыта исчезает.

20. Важнейшие законы статики получены при изучении равновесия твердых тел. Этот путь случайно был *историческим* путем, но вовсе не единственно возможный и *необходимый.* На эту мысль наводят различные пути, которыми шли Архимед, Стевин, Галилей и др. И действительно, при помощи совершенно простых законов из статики твердых тел могли бы быть найдены при изучении жидкостей и общие принципы статики. Стевин был во всяком случае очень близок к этому. Остановимся на этом несколько подробнее.

Представим себе жидкость, вес которой мы абстрагируем. Пусть она замкнута в сосуд и находится под известным давлением. Пусть часть жидкости отвердевает. На замкнутую верхнюю поверхность действуют пропорциональные элементам поверхности нормальные силы, и мы без труда видим, что равнодействующая этих сил всегда равна 0.

Если мы выделим часть замкнутой поверхности посредством замкнутой кривой, мы получим поверхность не замкнутую. Все поверхности, ограниченные одной и той же кривой (двойной кривизны) и подвергающиеся действию нормальных сил (того же направления), пропорциональных элементам поверхности, дают одну и ту же (рис. 79) результирующую.

Пусть отвердевает жидкий цилиндр, определенный какой-нибудь замкнутой направляющей линией. Обе поверхности, перпендикулярные к оси, можно не принимать во внимание. Вместо всей поверхности цилиндра можно рассматривать одну его направляющую линию. Мы получаем тогда совершенно аналогичные законы для нормальных сил, пропорциональных элементам плоской кривой.

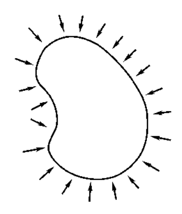


Рис. 79

Если замкнутая кривая превращается в треугольник, то рассуждение будет таково. Равнодействующие нормальные силы, действующие в серединах сторон треугольника, обозначим линиями, рис. 80, изображающими их величину и направление. Соответствующие прямые пересекаются в одной точке, а именно в центре описанного вокруг треугольника круга. Далее можно заметить, что простым параллельным перемещением изображающих силы линий можно получить другой, подобный предыдущему, треугольник, контур которого можно обвести в том же направлении, если принять во внимание направления сил.

Отсюда получается следующее правило:

Три силы, действующие в одной точке, пропорциональные сторонам треугольника и направленные перпендикулярно к ним и далее параллельным перемещением образующие треугольник и замыкающиеся в контур *того же самого* направления, уравновешивают друг друга. В этом правиле без труда можно узнать лишь другую форму правила параллелограмма сил.

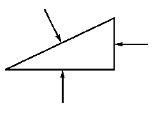


Рис. 80

Если представить себе вместо треугольника многоугольник, можно получить известное правило силового многоугольника.

Представим себе теперь, что в какой-нибудь тяжелой жидкости удельного веса $\varkappa$ одна часть отвердевает. На элемент α с замкнутой поверхностью действует нормальная сила $\alpha\varkappa z$, если z есть расстояние элемента от уровня жидкости. Результат нам уже известен из предыдущего.

Если на замкнутую поверхность действуют нормальные силы $\alpha\varkappa z$, где α есть элемент поверхности, а z — его вертикальное расстояние от данной плоскости E, то равнодействующая равна $V \cdot \varkappa$, где V означает замкнутый объем. Равнодействующая действует в центре тяжести объема, перпендикулярна к названной плоскости и к ней направлена.

Пусть при тех же условиях твердая кривая поверхность ограничена плоской кривой, замыкающей на плоскости поверхность A. Равнодействующая всех сил, действующих на кривую поверхность, есть R, где $R^2 = (AZ\varkappa)^2 + (V\varkappa)^2 - 2AZV\varkappa^2 \cos\nu$. Здесь Z означает расстояние центра тяжести поверхности A от E, а ν — угол между нормалями к E и A.

Читатель, знакомый с математикой, усмотрел уже, вероятно, в предыдущем правиле специальный случай правила Грина из теории потенциала, сущность которого заключается в том, что поверхностный интеграл сводится к объемному (или наоборот).

Таким образом можно, следовательно, *мысленно вносить* в систему сил находящейся в равновесии жидкости или, если угодно, *выносить* из нее более или менее сложные системы сил и так кратким путем (a posteriori) получать те или другие правила. Если Стевин этих правил не нашел, то это простая случайность. Изложенный здесь метод вполне соответствует его методу, и этим путем делать новые открытия все еще возможно.

21. Парадокс, полученный при изучении жидкостей, дал толчок к дальнейшему размышлению. Следует также принять во внимание то, что представление *физически-механического непрерывного целого* впервые образовалось при исследовании жидкостей. Благодаря этому развилось гораздо более свободное и богатое математическое воззрение, чем это было возможно из рассмотрения даже системы многих твердых тел. И, действительно, начало многих важных современных понятий механики, как, например, понятия потенциала, можно проследить именно до этого источника.

7. Принципы статики в их применении к газообразным телам

1. Рассуждения, изложенные относительно жидкостей, могут быть применены с небольшими только изменениями и к телам газообразным. В этом смысл исследование газов не представляет весьма благодатной почвы для механики. При всем том первые шаги, сделанные в этой области, имеют высокое культурно-историческое и общее научное значение.

Наблюдая сопротивление воздуха, ветер, и замыкая воздух в какой-нибудь пузырь, обыкновенный человек может уже заметить, что воз-

дух обладает свойствами тела. Но все это бывает слишком редко и никогда в этом нельзя убедиться с такой осязательностью и очевидностью, как в случае тел твердых и жидкостей. Знание этого, правда, существует, но оно не бывает настолько обычно и общераспространено, чтобы оно могло играть значительную роль. В повседневной жизни о существовании воздуха почти вовсе не думают.

Современные представления примыкают здесь непосредственно к античным. Анаксагор доказывает телесность воздуха сопротивлением его сжатию в замкнутых трубках и задержанием водою впущенного в нее воздуха (в форме пузырей?) (Arist. Phis. IV, 6). По Эмпедоклу воздух мешает воде проникать в сосуд, погруженный в воду отверстием вниз (Gomperz, Griechische Denker I, стр. 191). Филон Византийский пользуется сосудом, дно которого, перевернутое вверх, снабжено отверстием, закрытым воском. Только с удалением воска вода проникает в погруженный сосуд, а воздух удаляется из него в виде пузырей. Целый ряд таких опытов производится почти в современной школьной форме (Philonis lib. de ngeniis spiritualibus in V. Rose, Anecdota graeca et latina). В своей пневматике Герон описывает множество опытов своих предшественников с некоторыми собственными прибавлениями, примыкая в *теории* к Стратону, занимающему среднее положение между Аристотелем и Демокритом. *Абсолютная замкнутая пустота*, полагает он, может быть получена только искусственно, между тем как множество маленьких пустых пространств так распределены между частицами тел, не исключая и воздуха, как воздух распределен между зернышками песка. Обосновывается это так же наивно, как это делается в современных элементарных учебниках, именно возможностью разрежения и сгущения тел, включая и воздух (вдувание и высасывание воздуха в «Героновом шаре»). Один аргумент Герона в пользу пустот (пор) между частицами тел заимствуется из световых лучей, проникающих в воду. Следствием искусственного *увеличения* пустоты является, по Герону и его предшественникам, всегда притяжение, втягивание соседних частей тела. Легкий сосуд с узким горлышком, если высосать из него воздух, остается висеть на губах. Можно закрыть отверстие пальцем и погрузить сосуд в воду. «Если отнять под водой палец от горлышка, то вода проникает в образовавшуюся пустоту, несмотря на то, что движение жидкости вверх неестественно. То же явление наблюдается, когда человек ставит себе банки: приставленные к телу, они не только не отпадают, хотя они достаточно тяжелы, но

еще втягивают через поры тела соседнюю материю». Подробно изучается кривой сифон. Наполнение его жидкостью при втягивании воздуха происходит вследствие того, что жидкость следует за высасываемым воздухом, «ибо сплошная пустота немыслима». Если оба колена сифона равной длины, жидкость не вытекает. «Как на весах, вода остается в равновесии». Герон, следовательно, представляет себе течение жидкости аналогичным движению цепи, переброшенной через блок. Непрерывность столба, который, по нашему мнению, создается давлением воздуха, доказывается по его мнению «немыслимостью сплошной пустоты». Далее подробно доказывается, что не меньшее количество воды притягивается, увлекается большим количеством и что нельзя, согласно этому принципу, проводить воду *вверх*, а что процесс связан с принципом сообщающихся сосудов. Множество порой красивых и остроумных фокусов, описанных Героном в его «пневматике», как и «автоматах», имевших целью отчасти развлечь и отчасти вызвать изумление, представляет скорее привлекательную картину материальной культуры, чем научный интерес. Автоматическая игра труб, автоматическое открывание ворот храма и слышимый при этом гром — все это вещи, не представляющие дела науки. При всем том сочинения Герона много содействовали распространению физических знаний. См. W. Schmidt, Heron's Werke (Leipzig, 1899) и Diels, System des Straton, Sitzungsber. Der Berliner Akademie, 1893.

Хотя, как это видно из описаний Витрувия, древние имели инструменты, основанные на сгущении воздуха (как, например, так называемые водяные органы), и хотя изобретение духового ружья относится к эпохе Ктезибия и этот инструмент был известен уже Герике, при всем том представления о природе воздуха были еще и в XVII столетии чрезвычайно странными и неясными. Не следует поэтому удивляться тому духовному движению, которое вызвано было первыми значительными попытками в этом направлении. Мы поймем вдохновенное описание опыта Бойля с воздушным насосом, которое мы находим у Паскаля, если мы живо представим себе ту эпоху. Что могло быть чудеснее, чем это внезапное открытие, что вещь, которой мы не видим, которую мы едва чувствуем и на которую мы никакого внимания почти не обращаем, окружает нас везде и всегда, все и вся проникает и является важнейшим условием жизни, горения и мощных механических процессов. В первый раз, пожалуй, великий шаг вперед в науке ясно показал здесь, что естествознание не ограничивается исследованием того, что

осязательно, грубо дано нашим чувствам. (См. приложение, добавление 3.)

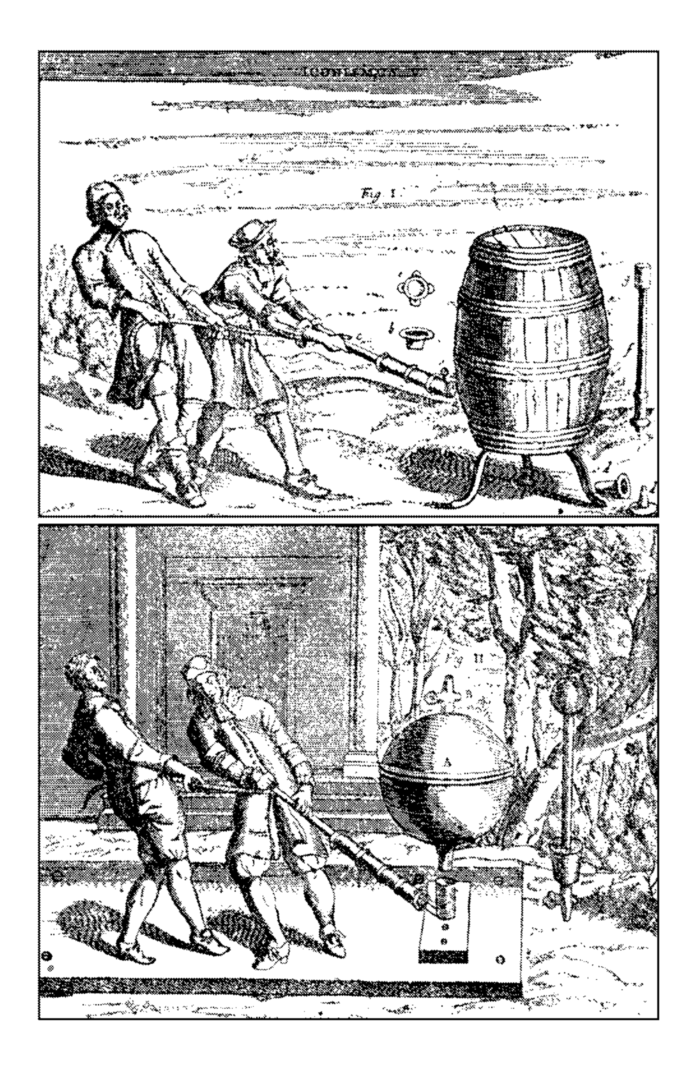
2. Во времена Галилея явления всасывания, действия насосов объясняли так называемым horror vacui, страхом природы перед пустым пространством. Предполагали, что природа обладает способностью мешать образованию пустого пространства, пользуясь для немедленного наполнения такового, если оно образуется, любой оказывающейся налицо вещью. Если не принять во внимание ни на чем не основанный спекулятивный элемент в этом воззрении, то приходится признать, что оно до известной степени, действительно, изображает соответствующие процессы. Тот, кто создал это воззрение, должен был, действительно, усмотреть в этих процессах известный принцип. Но не во всех случаях этот принцип применим. Рассказывают, что Галилей был весьма изумлен, услышав случайно о новом насосе с весьма длинной насасывающейся трубкой, не сумевшей поднять воду выше 18 итальянских локтей. Сначала он подумал, что horror vacui (или resisteuza del vacuo) имеет измеримую предельную силу. Наибольшую высоту, на которую вода может быть поднята насасыванием, он назвал altezza limitatissima. Галилей пытался также непосредственно определить груз, который был бы в состоянии вытянуть из закрытого насоса поршень. опущенный до самого дна насоса.

3. Торричелли пришел к мысли измерить сопротивление пустоты ртутным столбом вместо водяного и он ожидал получить столб, приблизительно в 14 раз меньшей длины, чем столб воды. Это ожидание его подтвердил Вивиани в 1643 г. в известном опыте, носящем в настоящее время имя опыта Торричелли. Стеклянная трубка в один метр длины, запаянная с одной стороны и наполненная ртутью, закрывается у открытого конца пальцем и, приведенная в вертикальное положение, погружается этим концом в ртуть. С удалением пальца ртутный столб опускается и останавливается на высоте приблизительно в 76 см. После этого опыта стало весьма вероятно, что жидкость гонится в пустоту вполне определенным давлением, и Торричелли очень скоро догадался, что это за давление.

Еще раньше Галилей определял вес воздуха: свесив стеклянный сосуд, наполненный только воздухом, он удалил из него часть воздуха нагреванием и снова свесил. Таким образом, то, что воздух имеет вес, было уже известно. Тем не менее для большинства людей horror vacui и вес воздуха были вещи очень далекие друг от друга. У Торри-

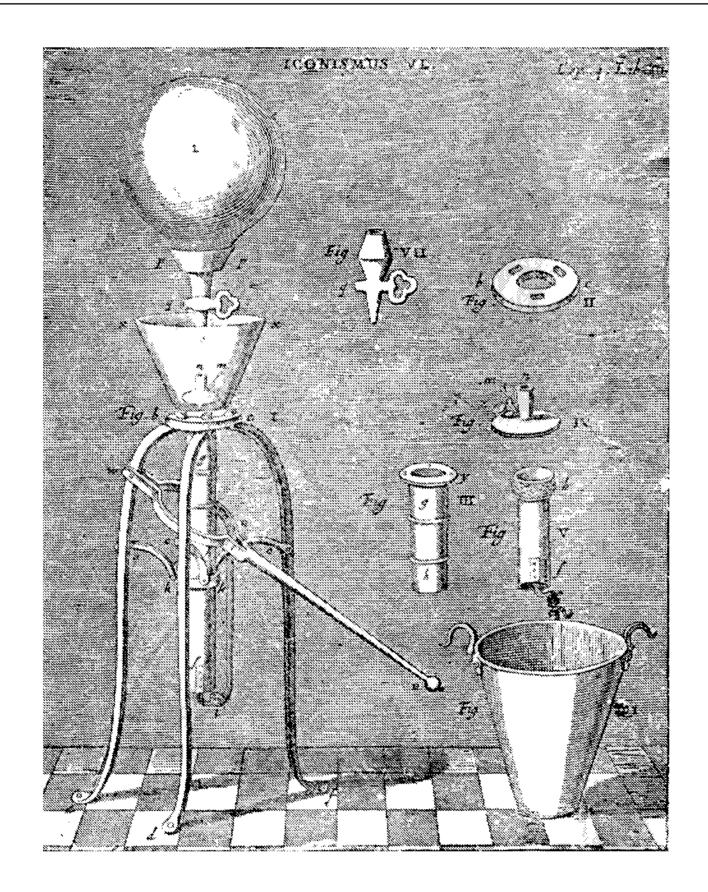


челли же мысли о том и другом могли настолько сблизиться, что он пришел к убеждению, что все свойства, приписываемые horror vacui более простым и вполне последовательным образом могут быть объяснены давлением столба жидкости или воздушного столба. Таким образом Торричелли открыл воздушное давление и первый также наблюдал изменения этого давления при помощи своего ртутного столба.



Первые опыты Герике

4. Известие об опыте Торричелли было распространено во Франции Мерсенном и дошло до Паскаля в 1644 г. Сообщения относительно теории опыта были, по-видимому, настолько неполны, что Паскаль почувствовал необходимость самому об этом подумать (Pesanteur de l'air, Paris, 1663).



Воздушный насос Герике

Он приступил к повторению опыта с ртутью и трубкой в 40 футов длиной, наполненной водой или скорее красным вином. Наклонением трубки он скоро убедился, что над столбом жидкости, действительно, существует пустота и видел себя вынужденным защищать этот взгляд от жестоких нападок своих соотечественников. Легкое получение пустоты, которое казалось до тех пор невозможным, Паскаль демонстрировал на стеклянном шприце, отверстие которого, закрытое пальцем, опускалось в воду, после чего поршень вытягивался без особого труда. Между прочим, Паскаль также показал, что из (кривого) сифона, в 40 футов высоты и наполненного водой, последняя не вытекает, ког-

да сифон находится в вертикальном положении, но вытекает, если его достаточно наклонить. Тот же эксперимент был проделан в меньших размерах с ртутью. Из того же сифона ртуть вытекала при наклонном его положении и не вытекала — при вертикальном.

В одной из последующих работ Паскаль определенно ссылается на опыты взвешивания воздуха, на давление его своей тяжестью и т. д. Он указывает, что небольшие животные (мухи) в состоянии вынести в жидкостях без вреда для себя высокое давление, если последнее только всесторонне, и применяет сейчас же этот факт к рыбам и животным, живущим в воздухе. Главная заслуга Паскаля заключается в доказательстве полной аналогии между процессами, обусловленными давлением жидкостей (давлением воды), и процессами, обусловленными давлением воздуха.

5. Целым рядом опытов Паскаль доказывает, что ртуть вгоняется в безвоздушное пространство давлением воздуха так, как она вгоняется в пространство, свободное от воды, давлением воды. Если опустить в очень глубокий сосуд с водой трубку, на нижнем конце которой находится кожаный мешок с ртутью, но так, чтобы верхний конец трубки выступал из воды и сама трубка оставалась свободной от воды, то вследствие давления воды ртуть будет подниматься в свободной от нее трубке и тем больше, чем глубже мы будем погружать последнюю. Тот же опыт может быть проделан с сифонной трубкой или трубкой внизу открытой. Внимательное изучение этого процесса навело, очевидно, Паскаля на мысль, что барометрический столб на вершине какой-нибудь горы должен стоять ниже, чем у ее основания, и что такой столб, следовательно, можно употреблять для определения высоты горы. Он сообщил эту идею своему шурину Перье, который сейчас же и осуществил опыт с хорошим успехом на Puy de Dôme (19 сентября 1648 г.).

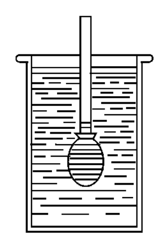


Рис. 81

Явления притяжения, наблюденные на хорошо пристающих друг к другу пластинках, заставляют Паскаля вернуться к давлению воздуха, и он иллюстрирует их сопротивлением, которое мы ощущаем, когда быстро поднимаем со стола большую плоскую шляпу. Аналогичное этому явление — приставание дерева ко дну сосуда под ртутью.

Чтобы объяснить явление истечения жидкости из сифона под действием давления воздуха, Паскаль воспроизводит то же явление, пользуясь давлением воды. Трубка abc (рис. 82) погружается в сосуды e

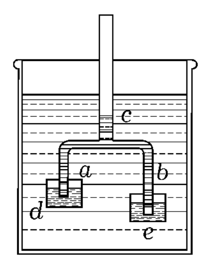


Рис. 82

и d, наполненные ртутью, обоими открытыми коленами a и b неравной длины. Если опустить весь прибор в очень глубокий сосуд с водой, но так, чтобы длинная *открытая* трубка все еще выдавалась над ее уровнем, то ртуть в a и b постепенно поднимается, оба столба ртути соединяются и начинается перемещение ртути из d в e через часть сифона, наверху открытую.

Опыт Торричелли был изменен Паскалем весьма остроумным образом. Трубка, имеющая форму $a\,b\,c\,d$ (рис. 83) и почти вдвое большую длину, чем обыкновенная барометрическая трубка, наполняется ртутью. Отверстия a и b замыкаются пальцами и трубка погружается в ртуть концом a. Если теперь отнять палец от a, то ртуть в $c\,d$ падает в расширение у c, а ртуть в $a\,b$ падает до высоты обыкновенного барометрического столба. У b образуется пустота, вследствие чего замыкающий это отверстие палец до боли всасывается внутрь. Если отнять палец также у b, то столб в $a\,b$ совершенно падает вниз, но зато ртуть, подверженная теперь давлению воздуха, поднимается из расширения c в $c\,d$ до высоты барометрического столба. Вряд ли было возможно скомбинировать опыт и проверку его без воздушного насоса более простым и более остроумным образом, чем это сделал Паскаль.

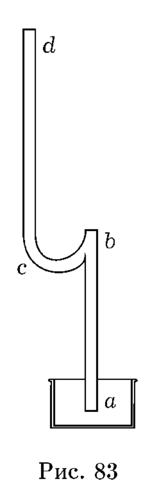


Рис. 83

6. Что касается эксперимента Паскаля на горе, то относительно его нам нужно еще коротко заметить следующее. Пусть b_0 есть уровень барометрического столба на море и пусть этот уровень опускается до kb_0 при поднятии на m метров, где k есть правильная дробь. При дальнейшем поднятии на m метров мы должны ожидать, что уровень барометрического столба будет $k \cdot kb_0$, ибо мы проходим слой воздуха, плотность которого относится к плотности воздуха в первом случае, как $k : 1$. При поднятии на высоту $h = n \cdot m$ метров соответствующий уровень барометрического столба будет

$$b_h = k^n \cdot b_0 \text{ или } n = \frac{\lg b_h - \lg b_0}{\log k} \text{ или } h = \frac{m}{\log k}(\log b_h - \log b_0).$$

Принцип данного метода, следовательно, весьма прост и становится трудным только благодаря многообразным побочным обстоятельствам и поправкам, которые приходится принимать во внимание.

7. Самые первоначальные и плодотворные работы в области аэростатики принадлежат Отто фон Герике. Движущим стимулом всех его опытов были, по-видимому, главным образом философские размышления. Работал он совершенно самостоятельно и только на рейхстаг в Регенсбурге (1654), где он демонстрировал свои опыты, изобретенные в 1650 г., он впервые услышал от Валериана Магнуса об опыте Торричелли. Этому же соответствует и совершенно другой, чем у Торричелли, метод, которым он изготовил свой водяной барометр.

В книге Герике (Experim. Magdeburg. Amstelod. 1672) перед нами живо рисуется ограниченная точка зрения его эпохи. То, что он был в состоянии постепенно оставить эту точку зрения и собственной своей работой создать лучшую, именно и свидетельствует о его духовной энергии. С изумлением мы видим, какой небольшой промежуток времени нас отделяет от научного варварства, и мы не должны поэтому удивляться тому, что социальное варварство давит еще на нас с такой тяжестью.

Во введении к книге и в различных других местах ее мы среди научных исследований находим множество заимствованных из Библии возражений против системы Коперника (которую автор старается опровергнуть), много рассуждений о месте неба, ада, о страшном суде. Значительное место в ней занимают философские рассуждения о пустом пространстве.

Воздух Герике рассматривает, как запах тел, которого мы не воспринимаем только потому, что привыкаем к нему с детства. Воздух для него не элемент. Он знает его изменения объема под действием теплоты и холода, его сжимаемость при помощи геронова шара, определяет его давление на основании собственных опытов в 20 локтей воды и указывает на его вес, благодаря которому пламя поднимается вверх.

8. Для получения пустоты Герике сначала пользовался деревянным бочонком, наполненным водой. На нижнем его конце был укреплен насос, употребляющийся для тушения огня. Вода должна была падать и высасываться, следуя за поршнем и подчиняясь силе тяжести. Герике надеялся, что под водой образуется пустое пространство. Укрепление насоса многократно оказывалось недостаточно сильным, так как вследствие воздушного давления на поршень приходилось употреблять значительную силу, чтобы его вытянуть. Наконец, насос был хорошо укреплен и вода была выкачана силой трех взрослых мужчин. Но одновременно с этим воздух с шумом ворвался через все поры бочонка

и пустота не была достигнута. В следующем опыте небольшой бочонок, наполненный водой, подлежащей выкачиванию, был помещен в другой больший бочонок, тоже наполненный водой. Но и здесь вода из большого бочонка постепенно проникала в меньший.

Таким образом, дерево оказалось материалом непригодным. Вместе с тем, однако, в последнем опыте Герике заметил некоторые следы удачи. Тогда он взял большой полый шар из меди и осмелился уже выкачивать прямо воздух. Сначала работа шла очень легко и хорошо. Но после нескольких движений поршня работа стала настолько трудной, что поршень с трудом двигали два дюжих работника (viri quadrati). Когда же работа выкачивания подвинулась уже довольно далеко, шар вдруг с громким треском сжался. Только с помощью медного сосуда совершенной шаровидной формы удалось, наконец, получить пустоту. Герике описывает, с какой силой воздух врывался в шар при открытии крана.

9. После этих экспериментов Герике построил специальный воздушный насос. Был взят большой стеклянный шар, помещенный в оправу и снабженный большой отделяющейся трубкой с краном. Через это отверстие можно было помещать в шар предметы, подлежащие исследованию. Для лучшей изоляции шар вместе с краном был помещен под водой на треножник, под которым находился настоящий насос. Впоследствии стали употреблять еще особые прибавочные сосуды, соединенные с шаром, из которого выкачивался воздух.

Явления, наблюдавшиеся Герике с помощью своего аппарата, уже весьма многообразны. Прежде всего бросаются в глаза шум, производимый свободной от воздуха водой, когда она ударялась о стенки сосуда, бурное проникновение воздуха и воды в сосуды при внезапном их открытии, выделение поглощенных жидкостями газов при выкачивании, отделение запаха, как выражается Герике. Горящая свеча при выкачивании тухнет потому, полагает Герике, что она черпает свою пищу из воздуха. Горение, как выражается вполне определенно Герике, есть не уничтожение, а превращение воздуха.

Колокол не звучит в пустоте. Птицы в ней умирают, некоторые рыбы разбухают и в конце концов лопаются. Виноград больше полугода сохраняется в свежем виде.

Длинная, погруженная в воду трубка с поршнем, непроницаемым для воздуха, представляет водяной барометр. Поднятый столб жидкос-

ти имеет в длину 19–20 локтей. Все явления, которые приписывались до тех пор действию horror vacui, объясняются давлением воздуха.

Важный опыт представляет взвешивание наполненного воздухом и свободного от воздуха после выкачивания колокола воздушного насоса. Вес воздуха бывает различным в зависимости от некоторых условий (температуры и состояния барометра). Определенного отношения между весом воздуха и весом воды, по мнению Герике, не существует.

Величайшее впечатление на современников оказали эксперименты относительно давления воздуха. Шар, сложенный из двух половин и освобожденный от воздуха, был со страшным треском разорван силой 16 лошадей. Тот же шар подвешивался и на нижней его половине укреплялась чашка весов с большим грузом. Большой цилиндр закрыт поршнем. К последнему прикреплена веревка, переброшенная через блок и разделенная на множество ветвей, за которые тянет много мужчин. Стоит соединить цилиндр с освобожденным от воздуха колоколом воздушного насоса, чтобы все мужчины упали. Аналогичным же образом поднимается большой груз.

О духовом ружье со сгущенным воздухом Герике упоминает, как о чем-то знакомом, и сам конструирует инструмент, который можно назвать духовым ружьем с разреженным воздухом. Давлением внешнего воздуха шар вгоняется в трубку, внезапно освобожденную от воздуха, в конце ее отбрасывает закрывающую ее кожаную пластинку и вылетает со значительной скоростью.

Закрытые сосуды, принесенные на вершину горы и там открытые, выделяют из себя воздух, а перенесенные обратно вниз всасывают воздух. Благодаря этим и другим опытам Герике узнает упругость воздуха.

10. Исследования Герике были продолжены далее Р. Бойлем в Англии. Ему осталось прибавить лишь немного новых опытов. Он наблюдает распространение света в пустоте и действие магнита через пустое пространство, зажигает трут при помощи зажигательного стекла, помещает барометр под колокол воздушного насоса и первый вводит весовой манометр. Он первый наблюдает кипение теплых жидкостей и замерзание воды при выкачивании воздуха.

Из общепринятых в настоящее время опытов с воздушным насосом мы упомянем еще об опыте падения тел, который в простой форме подтверждает взгляд Галилея, что тяжелые и легкие тела падают с тем

же ускорением, когда устранено сопротивление воздуха. В стеклянной трубке, из которой выкачан воздух, находится свинцовый шарик и кусочек бумаги. Когда трубка поставлена вертикально и затем быстро поворачивается на 180° (около горизонтальной оси), оба тела одновременно оказываются на нижнем конце трубки.

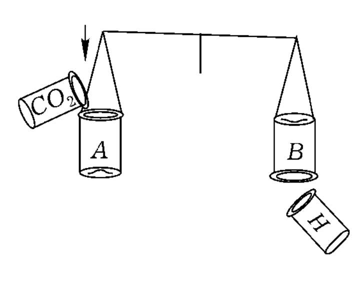


Рис. 84

Что касается данных количественных, то относительно их мы упомянем только, что давление воздуха, уравновешенное ртутным столбом в 76 см, будучи помножено на удельный вес ртути 13,59, дает 1,0328 кг на 1 см^2. Вес тысячи куб. сантиметров воздуха при 0°C и 760 мм давления составляет 1,293 грамма, и соответствующий удельный вес, отнесенный к воде, составляет 0,001293.

11. Герике знал только о д и н воздух. Легко себе представить произведенное впечатление, когда Блэкк в 1755 году открыл углекислоту (сгущенный воздухе), а Кавендиш в 1766 году — водород (горючий воздух) и за этими открытиями вскоре последовали аналогичные другие. Различные физические свойства газов весьма характерны. Большое неравенство их в весе Фарадей наглядно представил в следующем прекрасном лекционном опыте. Если подвесить на весах два стакана A, B, один отверстием вверх, а другой отверстием вниз, и установить равновесие, то можно в первый вливать тяжелую углекислоту сверху, а во второй — легкий водород снизу. В обоих случаях чашки весов отклоняются в направлении, указанном стрелкой. В настоящее время вливание газов можно сделать, как известно, прямо видимым при помощи оптического метода (Schlierenmehode).

12. Вскоре после открытия опыта Торричелли были сделаны попытки воспользоваться образующейся здесь пустотой. Другими словами, пытались конструировать так называемые ртутные воздушные насосы. Эти попытки увенчались, как известно, заметным успехом лишь в течение XIX столетия. Существующие в настоящее время приборы этого рода суть собственно барометры с большими расширениями в конце трубки и непостоянной разностью уровня обоих ее концов. Ртуть исполняет роль поршня в обыкновенном воздушном насосе.

13. Сила упругости воздуха, наблюдавшаяся Герике, была подробнее исследована Бойлем и впоследствии Мариоттом. Закон, найденный

обоими, заключается в следующем: если V есть объем данного количества воздуха, а P его давление на единицу поверхности стенок сосуда, то произведение $V \cdot P$ равно постоянной величине. Если объем воздуха уменьшается наполовину, то давление воздуха на единицу поверхности возрастает вдвое; если объем того же количества воздуха удваивается, то давление уменьшается вдвое и т. д. В последнее время некоторые английские авторы с полным основанием указывали на то, что открыл закон не Мариотт, а Бойль, хотя обыкновенно он носит название закона Мариотта. Нужно еще добавить, что Бойль знал уже о том, что закон этот не вполне точен, между тем как Мариотту это, по-видимому, не было известно.

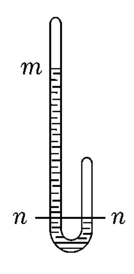


Рис. 85

Метод, которому следовал Мариотт, когда он открывал этот закон, был весьма прост. Наполнив трубки Торричелли лишь отчасти ртутью, он измерил оставшийся объем воздуха и с этими трубками проделал опыт Торричелли. Тогда он получил новый объем воздуха и, за вычетом ртутного столба из барометрической высоты, новое давление, под которым находился теперь тот же воздух.

Для сгущения воздуха Мариотт пользовался сифонной трубкой с вертикальными коленами, из которых одно, более короткое, содержало воздух и было наверху закрыто, а второе, более длинное, содержало ртуть и имело верхний конец открытый. Объем воздуха отсчитывался на трубке с делениями и к наблюдаемой разности уровней ртути в обоих коленах прибавлялась длина барометрического столба. В настоящее время оба ряда опытов простейшим образом осуществляются следующим образом. Цилиндрическая стеклянная трубка rr с закрытым наверху концом укреплена на вертикальном масштабе и каучуковой трубкой kk соединена со второй открытой стеклянной трубкой $r'r'$, которая может перемещаться на том же масштабе. Если наполнить трубки лишь отчасти ртутью, то, передвигая трубку $r'r'$, можно получить любую разность уровней ртути в обеих трубках и наблюдать соответственные изменения объема воздуха, заключенного в трубке rr.

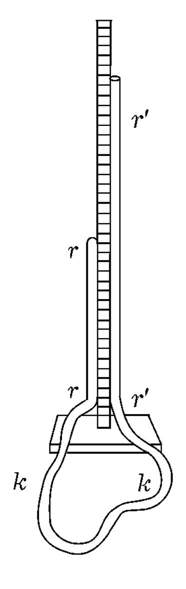


Рис. 86

Во время своих исследований Мариотт заметил, что и небольшое количество воздуха, совершенно обособленное от остальной массы воздуха и, следовательно, не зависящее от ее веса, все же поддерживает уровень барометрического столба, если замкнуть, например, открытое колено барометрической трубки. Простое объяснение этого факта, которое он, конечно, сейчас же и нашел, заключается в том, что до того, как была закрыта трубка, воздух был уже настолько сжат, что он мог уравновесить давление наружного воздуха и, следовательно, обладал тою же упругостью.

Что касается подробностей устройства и употребления воздушных насосов — подробностей, легко понятных с точки зрения закона Бойля–Мариотта, то мы здесь в них входить не будем.

14. Нам остается еще только заметить, что открытия в области аэростатики представляли так много нового и чудесного, что исходящий от них интеллектуальный стимул никак не следует оценивать слишком низко.

Глава II
Развитие принципов динамики

1. Работы Галилея

1. Перейдем теперь к обсуждению основ динамики. Последняя есть наука вполне современная. Все, что сделано древними и именно греками в области механики, относится к статике. Заложены были основы динамики лишь Галилеем. Чтобы согласиться с этим утверждением, достаточно рассмотреть несколько положений аристотеликов из эпохи Галилея. Для объяснения падения тяжелого тела и поднятия вверх легкого тела (например, в жидкостях) принималось, что каждая вещь ищет своего места, место же тяжелых тел находится внизу, а место легких — наверху. Движения были разделены на естественные, как, например, движение падения тел, и насильственные, как, например, движение брошенного тела. Из некоторых, немногих поверхностных данных опыта и наблюдений философски выводилось, что тяжелые тела падают быстрее, а более легкие — медленнее, или точнее, что тела большого веса падают быстрее, а тела малого веса — медленнее. Уже одно это достаточно ясно показывает, что познания древних, и именно греков, в динамике были весьма незначительны и что здесь дело заложения основ выпало на долю лишь нового времени. Часто и с различных сторон указывалось на то, что Галилей своим мышлением продолжал дело своих выдающихся предшественников. Мы и не хотим здесь вовсе отрицать этого, но все же должны указать на то, что Галилей значительно превосходил их всех. Величайшим предшественником Галилея, о котором у нас уже была речь в другом месте, был Леонардо да Винчи (1452–1519). Но его работы не могли оказать вовремя свое влияние на ход развития науки, ибо они стали отчасти известными лишь после обнародования их Вентурием (1797). Леонардо было известно отношение времен падения тел по длине и высоте наклонной плоскости. Приписывают ему иногда также знание закона инерции. В известном инстинктивном знании инерции начавшегося движения нельзя будет отказать ни одному нормальному человеку. Леонардо пошел, по-видимому, несколько даль-



Портрет Галилея

ше. Он знает, что из столба наложенных друг на друга шашек можно выбить одну, не приведя в движение остальных. Он знает, что тело, приведенное в движение при более слабом сопротивлении, двигается дольше, но объясняет это тем, что тело стремится пройти ту длину пути, которая соответствует данному ему импульсу, и нигде определенно не говорит об инерции движения в случай полного устранения со-

противления. (См. Wohlwill, Bibliotheca mathematica, Stockholm, 1888, стр. 19). Бенедетти (1530–1590) знает ускорение движения падающего тела и сводит его к сложению импульсов тяжести («Divers. Speculat. math. et physik. liber», Taurini, 1585). Движение брошенного тела он приписывает не влиянию среды, подобно еприпатетикам, а «вложенной силе» (virtus impressa), не уяснив себе однако вполне этой проблемы. Вот к Бенедетти действительно примыкал, по-видимому, Галилей, так как юношеские его работы имели много общего с работами Бенедетти. И Галилей принимает такую «virtus impressa», но он представляет себе эту силу еще уменьшающейся, и только после 1604 года он, как полагает Wohlwill, вполне уяснил себе свои законы падения тел.

Vailati (Atti della R. Accad. di Torino, vol XXXIII, 1898), подробно занимавшийся оценкой работ Бенедетти, находит главную его заслугу в том, что он подвергает математически-критической проверке и исправлению взгляды аристотеликов и пытается вскрыть их внутренние противоречия, чем очищается почва для дальнейшего развития науки. Допущение аристотеликов, что скорость падения тел обратно пропорциональна плотности окружающей среды, он признает неправильным и только в специальных случаях вообще возможным. Скорость падения пропорциональна $p - q$, где p есть вес тела, а q давление на него вверх в данной среде. Для того, например, чтобы в среде вдвое большей плотности скорость падения уменьшилась вдвое, должно существовать уравнение $p - q = 2(p - 2q)$, что верно только при $p = 3q$. Тел *легких* самих по себе для Бенедетти нет; он и воздуху приписывает и вес и давление вверх. Тела того же вещества, но не равной величины падают, по его мнению, с равной скоростью. Он приходит к этой мысли, представляя себе падение *равных* тел этого рода рядом сначала свободно, а потом в связи друг с другом, что движения изменить не может. В этом он приближается к точке зрения Галилея, с той только разницей, что последний все же глубже понимает дело, чем первый. Но не свободен Бенедетти и от некоторых заблуждений. Так, он полагает, что скорость падения тел равной величины и равной формы пропорциональна их весу, их плотности. Интересны его рассуждения о праще, как и представления его относительно колебания тела около центра Земли в проходящем через центр Земли канале — представления, против которых мало можно возразить. Тела, брошенные в горизонтальном направлении, медленнее как будто приближаются к земле. На этом основании Бенедетти принимает уменьшение тяжести и у волчка, вращающего-

ся вокруг вертикальной оси. Так он не разрешает загадок сполна, но подготовляет почву для их решения.

2. Сочинение «Discorsi e dimostrazioni matematiche», в котором Галилей сообщает о первом своем динамическом исследовании законов падения тел, было обнародовано в 1638 году. Свежий, более современный дух, характеризующий Галилея, сейчас же проявляется в том, что он не спрашивает, *почему* падают тяжелые тела, а задается вопросом, *как* они падают, по каким законам движется свободно падающее тело? Чтобы найти этот закон, он выбирает следующий путь: он делает различные допущения, но на этом не останавливается, подобно Аристотелю, а пытается узнать на опыте, верны ли они, проверяет их на опыте.

Первое воззрение, к которому он приходит, заключается в следующем. Ему кажется допустимым, что свободно падающее тело двигается так (ввиду того, что скорость движения его, очевидно, постоянно возрастает), что эта скорость возрастает вдвое с прохождением двойного пути, втрое — с прохождением тройного пути и т. д., одним словом, что достигнутые скорости возрастают пропорционально пройденным путям. Прежде чем приступить к проверке этого допущения на опыте, он обсуждает его логически, но запутывается при этом в ложном заключении. Он говорит себе, что если тело при данном пройденном пространстве достигло данной скорости, при двойном пройденном пространстве — двойной и т. д., если скорости во втором случае вдвое больше, чем в первом, то двойной путь проходится в то же время, что и однократный. Если представим себе при двойном пространстве пройденной только первую половину его, то на вторую половину придется как будто 0 времени. Движение падения тел может происходить тогда как будто мгновенно, что противоречит не только сделанному допущению, но и очевидности. К этому своеобразному ложному заключению мы вернемся еще впоследствии.

3. Найдя, как ему казалось, что это допущение неправильно, Галилей делает другое допущение, а именно, что достигаемая скорость пропорциональна времени падения тел. Если тело падает в течение определенного времени и затем еще раз падает в течение времени вдвое большего, то во втором случае оно должно достичь вдвое большей скорости, чем в первом. Противоречия он в этом допущении не нашел и потому приступил к проверке его на опыте, чтобы убедиться, совместимо ли оно с наблюдаемыми фактами. Допущение, что достижимая скорость

пропорциональна времени падения тел, трудно было проверить непосредственно. Легче зато было исследовать, по каким законам возрастает пройденное расстояние вместе с временем падения тел. Галилей вывел поэтому из своего допущения отношение между пройденным расстоянием и временем падения и это отношение подверг проверке на опыте. Этот вывод прост, нагляден и вполне правилен. Проведя прямую линию, он отрезает на ней части, изображающая прошедшие времена. В конечных точках этих отрезков он восстановляет перпендикуляры (ординаты), которые и представляют достигаемые скорости. Отрезок, например, OG линии OA означает время падения, а соответствующий перпендикуляр GH — достигнутую скорость.

Если обратим внимание на скорости, то вместе с Галилеем мы заметим следующее. Возьмем момент C, в который прошла половина OC времени падения OA, и мы увидим, что скорость CD составляет также половину конечной скорости AB.

Рассмотрим теперь два других момента E и G, находящиеся на равном расстоянии до и после момента C, и мы заметим, что скорость GH больше *средней* скорости CD на ту же величину, на которую скорость EF меньше ее. Каждому моменту *до* C соответствует равно отстоящий от C момент после момента C. Таким образом, то, чего не хватало в первой половине движения сравнительно с *равномерным* движением со скоростью, равной половине конечной скорости, было дополнено во второй половине. Мы можем поэтому считать, что пройденное расстояние было сделано равномерным движением со скоростью, равной половине конечной скорости. Если поэтому примем, что конечная скорость v пропорциональна времени падения t, то мы получаем $v = g \cdot t$, где g означает конечную скорость, достижимую в единицу времени (так называемое ускорение). Пройденное расстояние s дано, следовательно, в уравнении $s = \frac{gt}{2} \cdot t$ или $s = \frac{gt^2}{2}$. Такого рода движение, в котором, согласно предположению, равным временам соответствуют всегда равные приращения скоростей, называется *равномерно ускоренным* движением.

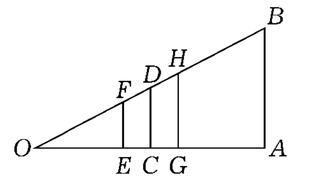


Рис. 87

Сопоставив времена падения, конечные скорости и пройденные расстояния, мы получаем следующую таблицу.

t	v	s
1	$1g$	$1\times 1\cdot\frac{g}{2}$
2	$2g$	$2\times 2\cdot\frac{g}{2}$
3	$3g$	$3\times 3\cdot\frac{g}{2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
t	tg	$t\times t\cdot\frac{g}{2}$

4. Связь между t и s может быть проверена экспериментально, и это Галилей сделал способом, который мы сейчас опишем.

Предварительно нужно заметить, что тех познаний и понятий, которые в настоящее время нам столь привычны, в то время совсем не было, и Галилею пришлось лишь развить их для нас. Поэтому он не мог действовать так, как мы в настоящее время действуем, а должен был избрать другой путь. Сначала он пытается замедлить движение падения, чтобы иметь возможность лучше его наблюдать. Он наблюдает шары, скатывающиеся по наклонной плоскости, принимая, что уменьшается при этом только скорость движения, но форма закона падения при этом не меняется. Если, начиная от верхнего конца наклонной плоскости, брались отрезки длин 1, 4, 9, 16, ..., то соответствующие времена падения должны были быть выражены числами 1, 2, 3, 4, ..., что и подтвердилось. Наблюдать эта времена Галилею удалось весьма остроумным способом. Часов в современной нам форме тогда не было, создание их стало возможным только на основании данных динамики, установленных Галилеем. Механические же часы, бывшие тогда в употреблении, были весьма неточны и годились только для измерения больших промежутков времени. Кроме того, были в употреблении большей частью водяные и песочные часы, наследие древности. И вот Галилей изготовляет простейшим образом такого рода часы, приспособив их для измерения небольших промежутков времени особенным, необычным тогда образом. Часы эти состояли из наполненного водой сосуда большого поперечника с мелким отверстием на дне, которое он закрывал пальцем. Когда шар начинал свое движение по наклонной плоскости

он, отняв палец, открывал сосуд и выпускал воду на весы; когда шар достигал конца своего пути, он закрывал сосуд. Так как высота давления жидкости вследствие большого поперечника сосуда мало изменялась, то вес вытекшей воды был пропорционален времени истечения. При этом опыте оказалось, что времена действительно нарастали однократно в то время, как пройденные расстояния возрастали в квадрате. Так опыт подтвердил вывод Галилея из сделанного им допущения и вместе с тем и само допущение.

Чтобы вполне понять ход мышления Галилея, мы должны принять в соображение, что, приступая к своим опытам, он обладал уже известным запасом инстинктивного опыта. За движением свободно падающего тела становится тем труднее следить глазами, чем дольше и глубже оно падает; в равной мере становится чувствительнее одновременно с этим его удар о подставленную руку, как и сильнее его звук при ударе. Скорость, следовательно, возрастает в зависимости и от времени падения, и от расстояния, пройденного телом в своем падении. Но в целях научных мысленное воспроизведение чувственных переживаний должно еще получить форму *логических* построений. Только таким образом мы можем пользоваться ими для того, чтобы к свойству, характеризованному отвлеченной *измерительной реакцией*, найти при помощи отвлеченной *численной конструкции зависящее* отсюда свойство факта, дополнить то, что непосредственно дано лишь отчасти. Это формирование наших идей совершается выделением того, что мы считаем важным, пренебрежением того, что считаем побочным, *абстракцией, идеализацией.* Эксперимент решает, достаточна ли наша формулировка. Без какого-нибудь заранее принятого взгляда эксперимент вообще невозможен, и последний только от первого получает свою форму. Ибо, как мы можем производить эксперименты, что может быть их содержанием, если у нас нет еще какого-нибудь предположения? От данных же предшествующего опыта зависит, в чем должно заключаться *дополняющее* действие эксперимента. Последний подтверждает, видоизменяет или опровергает сделанное допущение. Современный исследователь в аналогичном случае спросит: функцией чего является v? Какой функцией от t является v? Галилей в своей наивно-примитивной форме спрашивает: v пропорционально ли s, v пропорционально ли t? Галилей, следовательно, действует ощупью и синтетически и тоже приходит к цели. Школьные шаблонные методы являются лишь результатом исследования и не могут быть уже налицо в вполне развитом виде при пер-

вых шагах, которые делает гений (см. ст. Ueber Gedankenexperimente, Zeitschrift f. d. phyzik. u. Chem. Unterricht, 1897, I)[1].

5. Чтобы получить представление об отношении, существующем между движением по наклонной плоскости и движением свободно падающего тела, Галилей делает допущение, что тело, падающее вдоль высоты наклонной плоскости, достигает той же конечной скорости, что и тело, падающее по ее длине. Это допущение представляется нам несколько смелым, но в той форме, в которой выставил его и развил Галилей, оно вполне естественно. Попробуем просто выяснить путь, которым он пришел к нему. Он говорит: если тело падает свободно, то скорость его возрастает пропорционально времени падения. Когда тело прибыло вниз, мы представляем себе его скорость направленной обратно вверх и мы видим тогда, что тело поднимается вверх. Мы замечаем, что теперешнее его движение есть, так сказать, зеркальное изображение предшествующего. Как раньше скорость возрастала пропорционально времени падения, так она теперь будет убывать таким же образом. Если тело поднимается столько времени, сколько оно падало, то, когда оно поднимается до первоначальной высоты, скорость его равна 0. Мы видим, следовательно, что, благодаря достигнутой скорости падения, тело поднимается как раз столь же *высоко*, насколько оно упало. Допустим, что тело, падая по наклонной плоскости, могло бы достичь такой скорости, с которой оно, будучи помещено на плоскости другого уклона, могло бы подняться выше, чем оно упало. Мы были бы тогда в состоянии поднимать тела действием одной силы тяжести. Таким образом, в самом этом допущении содержится уже мысль, что достигнутая скорость падения зависит исключительно от *вертикальной* высоты падения, а от степени наклона пути не зависит; другими словами, в нем содержится не что иное, как свободное от противоречий понимание и признание того *факта*, что тяжелые тела не обладают стремлением подниматься вверх, а обладают стремлением *падать вниз.* Поэтому, если бы мы приняли, что тело, падая по длине наклонной плоскости, достигает большей скорости, чем падающее вертикально вдоль ее высоты, мы могли бы это тело с достигнутой скоростью переместить на другую наклонную или вертикальную плоскость, по которой оно поднялось бы на большую вертикальную высоту. Если же достиг-

[1]Статья эта, переработанная и дополненная автором, образует одну из глав («Умственный эксперимент») в его книге «Познание и заблуждение», переведенной на русский язык. (*Прим. пер.*)

нутая скорость на наклонной плоскости была бы меньше, то для того, чтобы достичь той же цели, нам оставалось бы только сделать процесс обратным. В том и другом случае тяжелое тело при соответствующем устройстве наклонных плоскостей могло бы исключительно собственным своим весом двигаться вверх, что находится в полном противоречии с инстинктивным нашим знанием природы тяжелых тел.

6. Галилей и здесь не удовлетворился одним философским и логическим обсуждением своего допущения, а сопоставил его с данными опыта.

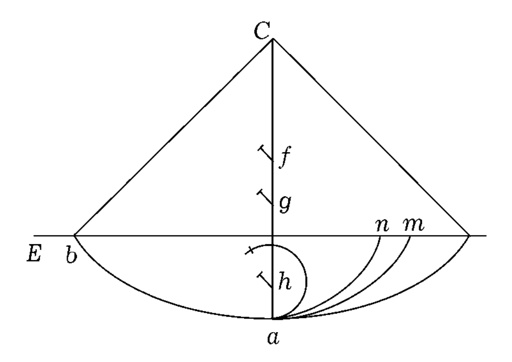


Рис. 88

Он берет простой нитяной маятник с тяжелым шариком. Когда он поднимает шарик, вытянув нить, до известной высоты, до известной горизонтальной плоскости и затем заставляет его упасть, то шарик на другой стороне поднимается до той же высоты. Если шарик и не достигает *точно* до той же высоты, то Галилей легко узнает, что причиной этого является сопротивление воздуха. Это видно уже из того, что пробковый шарик больше отстает, а тяжелое тело — меньше. Но если не принимать во внимание этой небольшой разницы, то тело достигает той же высоты. Движение маятника по дуге круга можно рассматривать, как случай движения его по целому ряду наклонных плоскостей различного уклона. Мы легко можем теперь вместе с Галилеем заставить тело подниматься по другой дуге, по другому ряду наклонных плоскостей. Чтобы достичь этого, мы вдоль вертикального направления нити вбиваем гвоздь f или g, мешающий части нити принимать участие в одной половине движения. Как только нить приходит в положение равновесия

у этого гвоздя, шарик, прошедший путь ba, начинает подниматься по другому ряду наклонных плоскостей, описывая дугу am или an. Если бы наклон плоскостей оказывал влияние на скорость падения, тело не могло бы подняться до той же высоты, с которой оно стало падать. В действительности же оно достигает этой высоты. Прибивая гвоздь на произвольной высоте, можно произвольно сократить маятник для половины колебания, но явление остается всегда тем же самым. Если прибить гвоздь h так, чтобы остаток нити не достигал более до плоскости E, то шарик переворачивается и наматывает нить на гвоздь, ибо, достигнув наибольшей высоты, которую он может достичь, он сохраняет еще некоторую скорость.

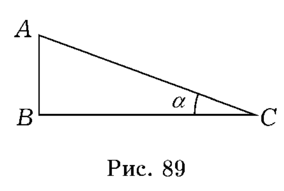


Рис. 89

7. В допущении, что тело, двигающееся по наклонной плоскости, достигает одной и той же конечной скорости, безразлично, движется ли оно вдоль высоты, или по длине плоскости, содержится ничего более, как допущение, что, благодаря достигнутой скорости, тело может подниматься как раз на столько же, на сколько оно упало. Если принять это допущение, то очень легко прийти вместе с Галилеем к тому взгляду, что времена падения вдоль высоты и по длине наклонной плоскости просто пропорциональны ее высоте и длине и, следовательно, ускорения обратно пропорциональны временам падения тела. Отсюда следует, что ускорение вдоль высоты относится к ускорению по длине плоскости, как длина ее относится к высоте. Пусть AB есть высота и AC длина наклонной плоскости. Пусть одно тело движется равномерно ускоренным движением вдоль высоты наклонной плоскости во время t, а другое тело движется по длине ее тоже равномерно ускоренным движением в течение времени t^1; конечная скорость обоих v. Мы тогда имеем, что

$$AB = \frac{v}{2} \cdot t \text{ и } AC = \frac{v}{2} \cdot t^1; \quad \frac{AB}{AC} = \frac{t}{t^1}.$$

Если g и g_1 суть ускорения вдоль высоты и по длине, то

$$v = gt \text{ и } v = g_1 t^1 \text{ и, следовательно, } \frac{g_1}{g} = \frac{t}{t_1} = \frac{AB}{AC} = \sin\alpha.$$

Этим способом можно из ускорения на наклонной плоскости вывести ускорение для случая свободно падающего тела.

Отсюда Галилей делает несколько выводов, которые частью вошли в элементарные учебники. Ускорения вдоль высоты и по длине обратно пропорциональны величинам той и другой. Поэтому если одно тело падает по длине наклонной плоскости, а другое тело падает свободно вдоль высоты ее и требуется определить расстояния, проходимые обоими телами в *равные* времена, то для решения вопроса остается только опустить перпендикуляр из точки B на длину наклонной плоскости. В то время, как одно тело проходит все расстояние вдоль высоты наклонной плоскости, другое тело проходит по длине ее отрезок AD.

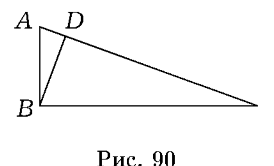


Рис. 90

Если около прямой AB, как диаметра, описать круг, то он пройдет через точку D, ибо у этой точки мы имеем прямой угол. Очевидно, что мы можем представить себе произвольное число различного уклона, проходящих через точку A, наклонных плоскостей AE, AF и т. д. и что хорды, проведенные в этом круге из точки A, т. е. прямые AG, AH, как и вертикальный диаметр AB, будут расстояния, проходимые падающим телом в равное время. Так как существенное значение имеют здесь, конечно, только длины и углы наклона наклонных плоскостей, то можно проводить хорды и из нижнего конца диаметра. Можно поэтому выставить следующее общее положение: вертикальный диаметр круга проходится падающим телом в то же время, как и каждая из хорд, проведенных в этом круге из одного конца диаметра.

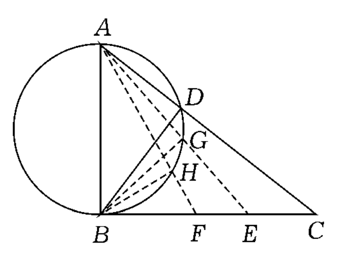


Рис. 91

Приведем еще один вывод, который в той прекрасной форме, какую придал ему Галилей, в элементарных учебниках обыкновенно уже не встречается. Представим себе, что в вертикальной плоскости отходят от одной и той же точки A желобки, наклоненные под самыми различными углами к горизонту; положив в точке A тяжелые тела, мы заставля-

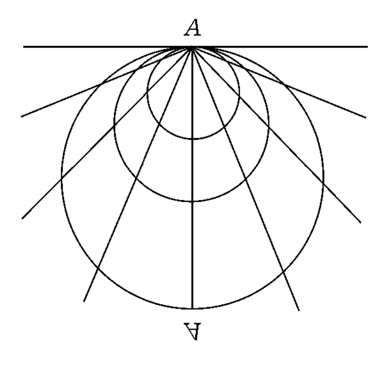


Рис. 92

ем их одновременно начать свое движение падения. Оказывается, что в одно и то же время все тела образуют круг. По истечении большого промежутка времени они находятся в круге большого радиуса и вообще радиусы кругов возрастают пропорционально квадрату времени. Если представить себе, что желобки совершенно наполняют не только плоскость, но и все пространство под горизонталью, проведенной через точку A, то движения тел образуют шар и радиусы таких шаров будут возрастать пропорционально квадрату времени. В этом нетрудно убедиться, если представить себе, что фигура вращается около вертикальной линии AV.

8. Мы видим, следовательно, что — упомянем об этом еще раз — Галилей не дал какой-нибудь *теории* движения падающего тела, а без всяких предубеждений исследовал и констатировал *действительные факты* этого движения.

Постепенно *приспособляя* свои мысли к фактам действительности и вполне последовательно *придерживаясь* этих последних, он пришел к взгляду, в котором, может быть, не столько он сам, сколько его последователи усмотрели особый, новый закон. Во всех своих рассуждениях Галилей, к величайшей выгоде естествознания, руководствовался одним принципом, который можно, пожалуй, назвать *принципом непрерывности.* Придя к какому-нибудь взгляду относительно какого-нибудь специального случая, мы постепенно изменяем в мыслях условия этого случая, насколько это вообще возможно, стараясь по мере возможности удержать этот взгляд. Нет никакого другого метода, который с большей верностью вел бы к *простейшему* пониманию всех процессов природы, достижимому с наименьшей затратой душевных сил и умственного труда.

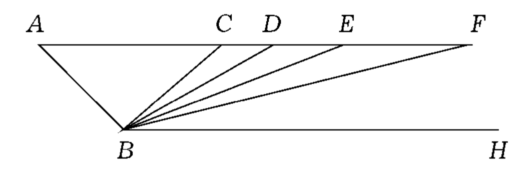


Рис. 93

Приведем один частный случай, который яснее покажет, что мы здесь подразумеваем, чем наше общее замечание. Галилей рассматривает тело, падающее вниз по наклонной плоскости AB и с достигнутой

скоростью падения поднимающееся вверх по другой наклонной плоскости BC. На всех плоскостях BC, BD и т. д. тело поднимается до горизонтальной плоскости, проходящей через точку A. Но так как оно на плоскости BD падает с меньшим *ускорением*, чем на плоскости BC, то оно и поднимается на плоскости BD с меньшим *замедлением*. Чем более плоскости BC, BD, BE, BF приближаются к горизонтальной плоскости, тем меньше на них замедления тела, тем дольше и дольше оно на них двигается. На горизонтальной плоскости BH замедление *совершенно* исчезает (если не считать, конечно, трения и сопротивления воздуха), тело двигается бесконечно долго и бесконечно далеко с *постоянной* скоростью. Дойдя до этого предельного случая, Галилей находит, так называемый, закон *инерции*, по которому тело, не встречающее препятствий в особых условиях, изменяющих его движение (силах), постоянно сохраняет свою скорость (и направление). К этому мы скоро вернемся.

В очень подробном исследовании (Die Entdeckung des Beharrungsgegetzes, Zeitschrift für Völkerpsychologie, 1884, XIV, стр. 365–410; XV, стр. 70–135, 337–387) E. Wohlwill показал, что предшественники и современники Галилея и даже Галилей сам пришли к познанию закона инерции лишь *весьма постепенно*, мало-помалу освобождаясь от представлений *аристотеликов*. И у Галилея занимают еще особое положение равномерное *движение по кругу* и равномерное *горизонтальное* движение. Исследование Wohlwill'я *весьма* ценно. Оно показывает, что Галилей с трудом достигал полной ясности в собственных своих мыслях, прокладывавших новые пути, и часто возвращался к более старым воззрениям, что заранее было весьма вероятно. (См. прилож., добавл. 4.)

Впрочем, и из *моего* изложения читатель убедится, что закон инерции не был усвоен Галилеем с той ясностью и общностью, которых он достиг впоследствии. (См. мою брошюру Erhaltung der Arbeit, стр. 47, прим.[1])

Но я все же думаю, вопреки мнению Wohlwill'а и Поске, что в моем изложении я указал тот пункт, который яснее всего должен был довести до *сознания* как Галилея, так и его последователей, *переход* от старого представления к новому. Как мало недоставало для полного уразумения этого закона, доказывает то, что *Балиани* без труда вычитал из изложения Галилея неразрушимость раз достигнутой скорости, на что указывает сам Wohlwill (l. c. стр. 112). Неудивительно как раз

[1]«Сохранение работы». (Есть перевод на русский язык с проверенного и исправленного автором экземпляра и предисловием его к этому переводу. — *Прим. пер.*)

то, что Галилей, раз дело шло почти исключительно о движении *тяжелых* тел, применяет закон инерции преимущественно к движениям горизонтальным. Он знает однако, что *лишенная тяжести* пуля двигалась бы прямолинейно в направлении полета («Dialog über die beiden Weltsysteme», Leipzig, 1891, стр. 184). Нет ничего удивительного, что медлили с общим выражением такого странного на первый взгляд закона.

9. Итак, движение падающего тела, констатированное Галилеем, как нечто действительно существующее, есть движение со скоростью, возрастающей пропорционально времени, т.е. так называемое равномерно ускоренное движение.

Было бы анахронизмом и совершенно не исторично, если бы мы захотели вывести равномерно ускоренное движение падающего тела, как это иногда делают, из постоянного действия силы тяжести. «Тяжесть есть постоянно действующая сила и, *следовательно*, вызывает в каждый равный элемент времени равное приращение скорости, и движение становится равномерно ускоренным». Такое изложение было бы потому неисторично и на все открытие бросило бы ложный свет, что только Галилей создал современное понятие силы. До него силу знали только как *давление*. Но ведь никто, кто не испытал этого на опыте, не может знать, что давление вообще сопровождается движением, и еще менее может знать, *как* давление переходит в движение и что давлением определяется не положение и не скорость, а ускорение. Прийти к этому одним философствованием невозможно. Можно относительно этого строить предположения, но только один опыт может окончательно осветить этот вопрос.

10. Итак, что условия, определяющие движение (силы), определяют и *ускорения*, дело далеко не само собою понятное. Стоит бросить взгляд на другие области физики, чтобы это сейчас же стало ясно. Разности температур тоже вызывают изменения в телах, но они вызывают не уравнивающие *ускорения*, а уравнивающие *скорости*.

Что условия, определяющие движение, создают ускорения, Галилей *усмотрел* в процессах природы. Кое-что усмотрели до него и другие. Когда говорят, что каждая вещь ищет своего места, то и в этом тоже содержится верное наблюдение. Это наблюдение не имеет только общего и исчерпывающего значения. Когда мы, например, бросаем камень вверх, он уже не ищет своего места, которое находится внизу. Другое дело — ускорение в направлении к земле, замедление движе-

ния вверх, которое впервые наблюдал Галилей: оно существует всегда. Его наблюдение остается всегда правильным, оно имеет более общее значение и охватывает *гораздо больше одним взглядом.*

11. Мы упоминали уже, что Галилей нашел так называемый закон инерции *между прочим.* Тело, на которое, как обыкновенно выражаются, не действует никакая сила, сохраняет без изменения свои направление и скорость. Странная была судьба у этого закона инерции. У Галилея он никогда, по-видимому, не играл особой роли. Последующие же ученые, а именно *Гюйгенс* и *Ньютон*, формулировали его, как особый закон. Более того, инерцию превратили даже в общее свойство материи. Но нетрудно заметить, что закон инерции вовсе не есть какой-то особый закон, а входит уже, как составная часть, в воззрение Галилея, что все определяющие движение условия (силы) создают *ускорения.*

И действительно, раз силой определяется не положение и не скорость, а ускорение, *изменение* скорости, то понятно, что там, где нет силы, нет и изменения скорости. И нет вовсе надобности дать этому особое выражение. Только замешательство начинающего, от которого не могут отделаться и великие исследователи перед лицом массы нового материала, могло привести к тому, что они *один и тот же* факт представили себе, как *два различных* факта и *дважды* формулировали его.

Но представлять инерцию, как нечто само собою понятное, или выводить ее из общего положения «действие какой-нибудь причины сохраняется», во всяком случае, совершенно ошибочно. Только ложное стремление к строгости мышления может привести к таким уклонениям. Со схоластическими положениями вроде приведенного выше в этой области ничего сделать нельзя. Легко убедиться, что в такой же мере здесь пригодно противоположное положение: «cessante causa cessat effectus» («с прекращением причины прекращается и ее действие»). Если назвать «действием» достигнутую скорость, то правильнее первое положение, а если назвать «действием» ускорение, то правильно положение второе.

12. Рассмотрим теперь исследования Галилея еще с другой стороны. Он приступил к этим исследованиям с понятиями, общепринятыми в его время, именно понятиями, развитыми техникой. Таким понятием является понятие скорости, которое очень легко получается из равномерного движения. Если тело в каждую секунду времени проходит равный путь с, то пройденный им по истечении t секунд путь $s = c \cdot t$.

Путь c, пройденный в одну секунду, мы называем скоростью и находим его, раз мы знаем из наблюдения отрезок пути и соответствующее ему время, при помощи уравнения $c = \frac{s}{t}$, т.е. делением числа, определяющего величину пройденного расстояния, на число, определяющее величину протекшего времени.

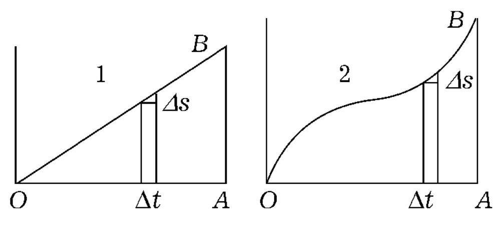


Рис. 94

Галилей не мог довести своих исследований до благополучного конца, не изменив и не расширив традиционного понятия о скорости. Представим себе в 1 равномерное и в 2 неравномерное движение, отложив на линии OA, как абсциссе, протекшие времена и на AB, как ординате, — пройденные расстояния. В 1 мы находим для скорости всегда *одну и ту же* величину c, как бы ни было велико приращение пути, которое мы делим на соответственное приращение времени. Если же поступать таким же образом в 2, величины скорости получались бы самые различные, так что здесь обычное понятие скорости в данном случае не имеет одного определенного смысла. Но если рассматривать приращение пути в достаточно малый промежуток времени, причем элемент кривой 2 приближается к прямой, то можно рассматривать здесь движение, как движение равномерное. Скоростью в этом элементе движения мы можем тогда назвать частное от деления элемента пути на соответственный элемент времени, $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Еще точнее определяется скорость в один момент, как предельная величина, которую принимает частное $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при бесконечно малых элементах, и это частное обозначают тогда через $\frac{ds}{dt}$. Это новое понятие содержит в себе прежнее, как свой частный случай, и без всяких затруднений может быть применено и к движению равномерному. Хотя ясная формулировка этого более широкого понятия принадлежит времени гораздо более позднему, чем время Галилея, тем не менее ясно, что последний пользовался им в своих мыслях.

13. Совершенно новым понятием, к которому пришел Галилей, было понятие *ускорения*. В случае равномерно ускоренного движения скорости возрастают пропорционально времени по тому же закону, по которому в случае равномерного движения пройденные пути возрастают пропорционально времени. Если обозначить через v скорость, достигнутую по истечении времени t, то $v = g \cdot t$. При этом g означает приращение скорости в единицу времени или ускорение, которое можно также получить при помощи уравнения $g = \frac{v}{t}$. Когда приступили к исследованию неравномерно ускоренных движений, пришлось и это понятие ускорения подвергнуть подобному же расширению, как и понятие скорости. Представим себе в 1 и 2 снова времена отнесенными как абсциссы, но в качестве ординат *скорости*, и мы можем повторить все прежние рассуждения и ускорение определить через $\frac{dv}{dt}$, где dv означает бесконечно малое приращение скорости, а dt — соответствующее приращение времени. В дифференциальном исчислении мы ускорение *прямолинейного* движения обозначаем через $\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

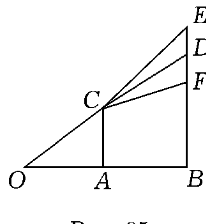


Рис. 95

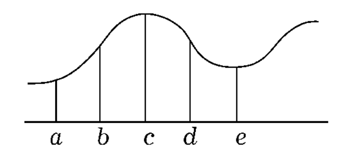


Рис. 96

Развитые здесь понятия могут быть представлены довольно наглядно. Если отнести времена, как абсциссы, а пройденные пути, как ординаты, то нетрудно заметить, что уклон кривой пути в каждый момент дает нам скорость. Если таким же образом распределить времена и скорости, то уклон кривой скорости в каждый момент дает нам ускорение. Ход изменений для этого последнего случая можно узнать уже и на кривой пути, что ясно из следующих соображений. Представим себе, что прямая OCD обычным образом изображает равномерное движение. Сравним с этим движение OCE, скорость которого во вторую половину времени больше, и другое движение OCF, скорость которого соответственно меньше. Нам нужно, следовательно, для одного и того же времени $OB = 2OA$ в первом случае отнести, как ординату, пря-

мую, большую, чем $BD = 2AC$, а во втором случае меньшую прямую. Мы без труда замечаем, что ускоренному движению соответствует кривая пути, выпуклая относительно оси абсцисс, а замедленному движению вогнутая такая кривая. Представим себе, что карандаш двигается вверх и вниз в вертикальном направлении на бумаге, двигающейся равномерно справа налево. Особенности этого движения не трудно рассмотреть из рис. 96. У a скорость карандаша была направлена вверх, у b она была больше, у c она была равна 0, у d она была направлена вниз, у e опять равна 0. В точках a, b, d, e ускорение направлено вверх, а у c — вниз; у c и у e оно наибольшее.

14. Чтобы обозреть все, что было найдено Галилеем, мы составим таблицу из времен, достигнутых скоростей и пройденных расстояний.

t	v	t
1	g	$1\frac{g}{2}$
2	$2g$	$4\frac{g}{2}$
3	$3g$	$9\frac{g}{2}$
...	...	...
t	tg	$t^2\frac{g}{2}$

Так как содержание нашей таблицы развивается по столь простому закону, что его можно сейчас узнать, то ничто не мешает всю таблицу заменить *правилом ее составления.* Если рассмотрим связь, существующую между первой и второй колонкой, то увидим, что она может быть выражена через уравнение $v = g \cdot t$, которое в основе своей есть не что иное, как указание, как составлять таблицу. Связь между первой и третьей колонкой может быть выражена через уравнение $s = \frac{g \cdot t^2}{2}$. Связь между второй и третьей колонкой может быть выражена через уравнение $s = \frac{v^2}{2g}$.

Из трех уравнений

$$v = g \cdot t,$$

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

$$s = \frac{v^2}{2g}$$

Галилей пользуется собственно только первыми двумя. Третье более оценил лишь Гюйгенс и тем достиг значительных успехов.

15. С таблицей мы можем сейчас же связать одно замечание, весьма выясняющее дело. Мы сказали уже выше, что благодаря достигнутой скорости падения тело может снова подняться на первоначальную высоту, причем скорость его подобным же образом (в отношении времени и пространства) убывает, как она при падении возрастала. Свободно падающее тело получает с удвоением времени падения двойную скорость, но проходит в это двойное время в четыре раза большее расстояние. Поэтому тело, которому мы сообщаем двойную скорость вертикально вверх, будет подниматься *вдвое* больше времени, но в четыре раза выше, чем тело не с двойной, а с однократной скоростью.

Вскоре после Галилея было замечено, что в скорости какого-нибудь тела скрывается нечто, соответствующее силе, т. е. нечто, чем может быть преодолена какая-нибудь сила, известная «способность действия», как это нечто было удачно названо. Спорили только относительно того, пропорциональна ли эта способность действия *скорости* или *квадрату скорости*. Последователи Декарта принимали первое, а последователи Лейбница — второе. Но нетрудно заметить, что относительно этого нечего и спорить. Тело с двойной скоростью преодолевает данную силу в двойное время, но на пути *в четыре раза большем*. Таким образом, в отношении времени способность его действия пропорциональна скорости, а в отношении пути — квадрату скорости. На это недоразумение обратил внимание, хотя и не в очень ясных выражениях, д'Аламбер. Но следует указать на то, что и Гюйгенс уже вполне ясно представлял себе существующее здесь соотношение.

16. Экспериментальный метод, применяющийся в настоящее время для проверки законов падения тел, несколько отличен от метода Галилея. Существует для этого два пути: или замедляют быстрое и с трудом поддающееся прямому наблюдению движение падающего тела без изменения закона настолько, чтобы удобно было его наблюдать, или же движения вовсе не изменяют, а улучшают только средства наблюдения. На первом принципе основаны желоб Галилея и Атвудова машина. Последняя состоит из легкого блока (рис. 97), через который переброшена нить с двумя равными грузами P на обоих концах. Если к одному грузу P прибавить небольшой груз p, то этот излишек вызывает равномерно ускоренное движение с ускорением $\frac{p}{2P+p} \cdot g$, что легко будет понять после разбора нами понятия массы. При помощи

связанного с блоком масштаба нетрудно доказать, что временам 1, 2, 3, 4, ...соответствуют пройденные расстояния 1, 4, 9, 16, ...Чтобы получить конечную скорость, соответствующую данному времени падения, снимают при помощи особо приспособленного кольца продолговатый прибавочный груз p и тогда движение груза P совершается без ускорения.

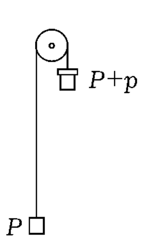


Рис. 97

На другом принципе основан аппарат *Морена.* Тело с прикрепленным к нему карандашом описывает горизонтальную прямую на вертикальном листе бумаги, приводимом в равномерное движение посредством часового механизма. Если тело падает, а бумага не двигается, то оно чертит вертикальную прямую. Когда комбинируются оба движения, то получается парабола, в которой горизонтальные абсциссы соответствуют протекшим временам, а вертикальные ординаты — пройденным расстояниям. Для абсцисс 1, 2, 3, 4, ...получают ординаты 1, 4, 9, 16, ...Вместо плоского листа бумаги *Морен* употребляет быстро вращающийся цилиндрический барабан с вертикальной осью, рядом с которым спускается на нити тело. Другим методом, основанном на том же принципе, пользовались независимо друг от друга Laborde, Lippich и v. Babo. Покрытая сажей стеклянная пластинка (рис. 98а) свободно падает вертикально вниз в то время, как горизонтально колеблющийся вертикальный стержень, который при первом прохождении через положение равновесия освобождает движение падения, записывает на пластине кривую. Вследствие постоянства продолжительности колебания стержня и возрастающей скорости падения записываемые стержнем волны становятся все длиннее. На рис. 98 $bc = 3ab$, $cd = 5ab$, $de = 7ab$ и т. д. Закон падения обнаруживается здесь вполне ясно, так как $ab + cb = 4ab$, $ab + bc + cd = 9ab$ и т. д. Закон скорости движения подтверждается наклонами касательных в точках a, b, c, d и т. д. Если определить продолжительность колебания стержня, то величина g определяется в подобного рода опыте с значительной точностью.

Уитстон пользовался для измерения малых времен быстро вращающимся часовым механизмом (хроноскопом), приводимым в движение в начале подлежащего измерению времени и задерживаемым в его конце. Гипп целесообразным образом видоизменил этот метод; он вводил в быстро вращающийся часовой механизм, регулируемый быстро колеблющейся пружиной, только указатель ничтожной массы, которую

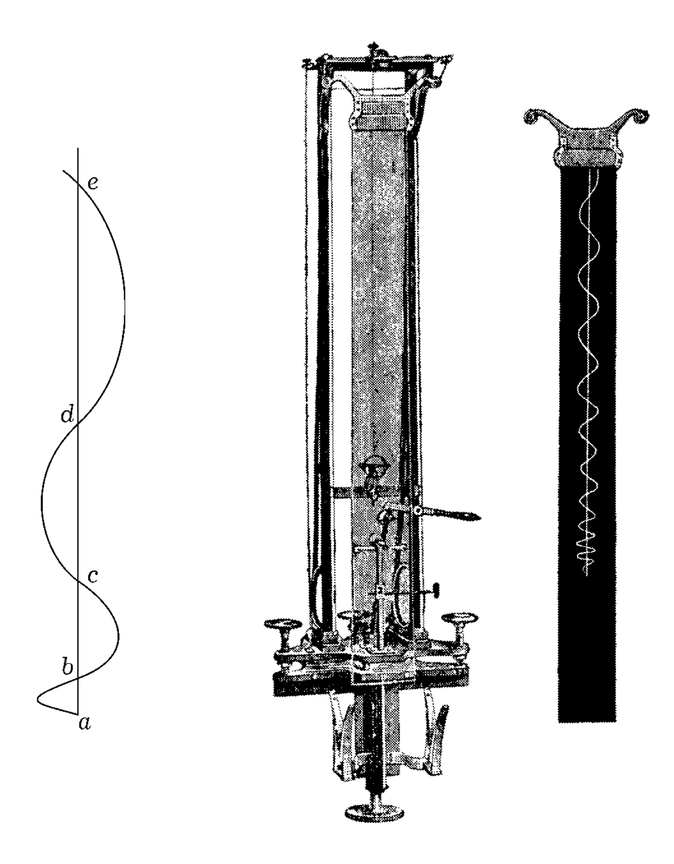


Рис. 98 Рис. 98а

он выводил по окончании времени измерения при помощи электрического тока. Как только тело начинает падать, ток прерывается (и, следовательно, указатель включается), а как только тело достигает цели, ток снова замыкается (и, следовательно, указатель снова выключается). Таким образом можно измерить время падения при помощи пути, пройденного указателем.

17. Из остальных работ Галилея упомянем еще его мысли о движениях маятника, его опровержение мнения, будто тела большого веса быстрее падают, чем тела меньшего веса. К обоим пунктам мы вернемся еще по другому поводу. Здесь же заметим еще, что, познав постоян-

ную продолжительность маятникообразных движений, Галилей сейчас же предложил применять простой нитяной маятник для счета пульса больных, как и для астрономических наблюдений и отчасти сам применял его.

18. Величайшую важность имеют еще исследования его над движением брошенного тела. Свободно падающее тело испытывает, согласно представлению Галилея, всегда вертикальное ускорение g к земле. Если оно в начале движения обладает уже вертикальной скоростью c, то по истечении времени t скорость его будет $v = c + gt$. При этом начальную скорость вверх считают отрицательной. Пройденный за время t путь есть $s = a + c \cdot t + \frac{gt^2}{2}$, где ct и $\frac{qt^2}{2}$ суть части пути, соответствующие последовательно равномерному и равномерно ускоренному движению. Постоянная a равна нулю, если мы считаем путь от точки, в которой тело находилось во время $t = 0$. Установив основные свои точки зрения, Галилей очень легко рассмотрел, что движение тела, брошенного в горизонтальном направлении, есть комбинация двух ***независимых*** друг от друга движений, горизонтального равномерного и вертикального равномерно ускоренного. Этим он ввел в употребление принцип ***параллелограмма движения.*** Не представляло также для него существенных затруднений и исследование движения тела, брошенного в косом направлении.

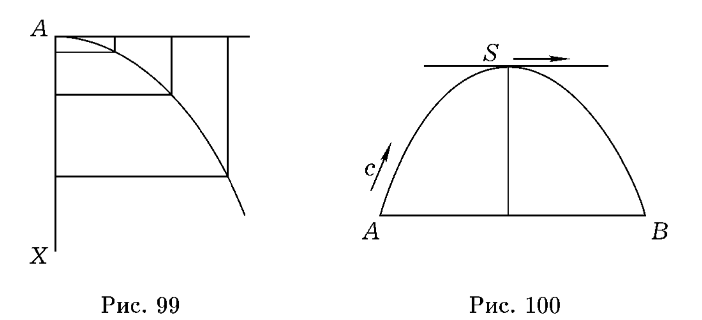


Рис. 99 Рис. 100

Если тело получает скорость c в горизонтальном направлении, то за время t оно проходит путь $y = ct$, а в вертикальном направлении оно падает на расстоянии $x = \frac{gt^2}{2}$. Различные условия, определяющие движение, не влияют взаимно друг на друга и определяемые ими движения совершаются ***независимо друг от друга.*** К этому допущению Галилей пришел внимательным наблюдением процессов и оно подтверди-

лось в действительности.

Из обоих приведенных выше уравнений мы получаем для кривой, описываемой телом при комбинации обоих движений, $y = \sqrt{\frac{2c^2}{g}} \cdot x$. Кривая эта есть аполлонова парабола с параметром $\frac{c^2}{g}$ и вертикальной осью, что было уже известно Галилею.

Вместе с Галилеем мы легко можем заметить, что движение тела, брошенного в косом направлении, не представляет нового случая. Скорость c, сообщенная телу под углом α к горизонту, разлагается на горизонтальную составляющую $c \cdot \cos\alpha$ и вертикальную составляющую $c \cdot \sin\alpha$. С последней скоростью тело поднимается вверх в то же время t, которое ему понадобилось бы, чтобы, падая вертикально вниз, достичь этой скорости. Таким образом, $c \cdot \sin\alpha = g \cdot t$. В этот момент оно достигает величайшей своей высоты, вертикальная составляющая его начальной скорости исчезает и от точки S оно продолжает свое движение, как тело, брошенное в горизонтальном направлении. Если рассматривать моменты, равноотстоящие от момента прохождения через точку S до и после нее, то нетрудно видеть, что в оба эти момента тело находится на равном расстоянии от перпендикуляра, опущенного из точки S и на равном расстоянии вниз от горизонтальной линии, проходящей через S. Другими словами, кривая симметрична относительно вертикальной линии, проходящей через точку S; она — парабола с вертикальной осью и параметром $\frac{(c \cdot \cos\alpha)^2}{g}$.

Чтобы найти расстояние, пройденное брошенным телом, нам нужно рассматривать только горизонтальное движение во время поднятия и опускания тела. Время поднятия здесь, согласно сказанному, равно $t = \frac{c \cdot \sin\alpha}{g}$ и таково же время падения вниз. Таким образом, путь, пройденный с горизонтальной скоростью $c \cdot \cos\alpha$, есть

$$w = c \cdot \cos\alpha \cdot 2\,\frac{c \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{c^2}{g} \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

Пройденное расстояние, следовательно, всего больше в случае $\alpha = 45°$ и равновелико для обоих углов $\alpha = 45° \pm \beta$.

19. Чтобы правильно оценить, сколь много сделал Галилей своим анализом движения брошенного тела, нам нужно рассмотреть более старые попытки этого рода. Зандбах (1561) полагал, что пушечный выстрел движется в прямолинейном направлении до истощения его скорости

и затем падает вертикально вниз. Тартаглия (1537) полагает, что путь выстрела складывается из прямолинейной части, примыкающей к ней дуги круга и, наконец, вертикальной касательной к этой дуге. Он знает, правда, — и еще яснее это высказывает Ривиус (1582) — что, говоря точно, путь выстрела всегда — кривая, так как сила тяжести постоянно действует отклоняющим образом, но тем не менее он к полному анализу не приходит. Начало пути брошенного тела легко вызывает ложную иллюзию, будто скорость брошенного тела прекращает действие силы тяжести, каковой иллюзии поддался и Бенедетти (см. стр. 107). Мы не замечаем в этой части кривой *падения* тела и забываем о краткости соответствующего *времени падения*. Если не принимать во внимание этого обстоятельства, то и современный человек может принять водяную струю, быстро сменяющиеся частички которой не принимаются во внимание, за тяжелое тело, висящее в воздухе. С той же иллюзией мы встречаемся при центробежном маятнике, волчке, свободной цепи Aitkens'a, делающейся как бы твердой при быстром вращении (Philos. Mag., 1878), при локомотиве, который при недостаточном времени падения и работы быстро проходит по плохому мосту, а в спокойном состоянии не удержался бы на нем. При полном анализе все эти явления оказываются не более удивительными, чем явления самые обыкновенные. Как это полагает Vailati, усилившееся распространение огнестрельного оружия в течение XIV века оказало существенное содействие изучению движения брошенного тела, а посредственно и всей механики. Те же по существу явления встречаются и в старых механических метательных машинах и при бросании рукой, но новая и импозантная форма все же могла привлечь внимание с гораздо бо́льшею силою.

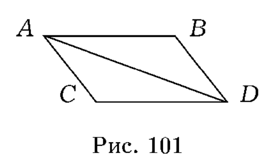


Рис. 101

20. Важное значение имеет познание *независимости* встречающихся в природе условий, определяющих движение (сил), *друг от друга* — познание, добытое и нашедшее свое выражение при исследовании движения брошенного тела. *Одно* тело может двигаться в направлении AB (рис. 101) в то время, как пространство, в котором происходит это движение, перемещается в направлении AC. Тело достигает тогда из A в B. И это происходит также и в том случае, когда оба условия, определяющие движения AB и AC в одно время, не имеют друг на друга никакого влияния. Легко видеть, что по параллелограмму можно складывать не только перемещения, происшедшие уже, но и мгновенные

скорости и ускорения.

Взгляд Галилея на движение брошенного тела, как на процесс, сложенный из двух различных независимых друг от друга движений, кладет начало целому ряду аналогичных важных процессов познания. Можно сказать, что в одинаковой мере важно познать *независимость* двух условий A и B друг от друга, как и *зависимость* двух условий A и C друг от друга. Ибо только первое дает нам возможность без помехи проследить второе. Стоит только вспомнить, какую помеху в своем развитии создало себе средневековое естествознание допущением зависимостей несуществующих. Аналогичны открытию Галилея правило параллелограмма сил Ньютона, сложение колебаний струн Совера, сложение термических движений Фурье. При последнем исследователе метод сложения явления из независимых друг от друга частичных явлений проникает во все области математической физики в форме представления общего интеграла, как суммы частных интегралов. Разложение процессов на независимые друг от друга части Фолькманн удачно назвал *изоляцией*, а сложение процесса из таких частей *суперпозицией* (*наложением*). Оба процесса вместе дают лишь нам возможность понять или воспроизводить в наших мыслях *частями* то, что *сразу* является для нас непостижимым.

«Только в *очень* редких случаях природа выступает перед нами единой со всем обилием своих явлений, но в большинстве случаев мир явлений, наоборот, носит характер безусловно *сложный* ... Одна из задач нашего познания должна будет заключаться в том, чтобы понять явления, как они нам даны, сложенными из целого ряда частных явлений и сначала изучить эти последние во всей их чистоте. Только тогда, когда мы знаем, какое участие принимает каждое частное явление в общем явлении, мы можем овладеть всем целым ... » (См. Volkmann, Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaft, 1896, стр. 70. См. далее Principien der Wärmelehre, стр. 123, 151, 452.)

21. Творческая деятельность Галилея распространяется далеко за пределы механики. Напомним только, что он положил основание термометрии, дал набросок метода для определения скорости света, прямо констатировал отношения чисел колебаний при музыкальных интервалах, объяснил явление консонанса. Он слышит о телескопе, и этого достаточно, чтобы он повторил открытие его и устроил телескоп из двух чечевиц и одной органной трубы. Быстро одно за другим его инструмент показывает ему горы на Луне, высоту которых он измеря-

ет, звезду Юпитер с вращающимися вокруг него спутниками, в чем он усматривает уменьшенную модель мировой системы, своеобразную фигуру Сатурна, фазы Венеры, пятна и вращение Солнца — и во всем этом он видит новые и сильнейшие аргументы в пользу системы Коперника. Необходимо также упомянуть о его мыслях относительно геометрически подобных животных и машинах, о форме и твердости костей, о его идеях, послуживших исходным началом для новых математических методов. Вслед за Wohlwill'ем Гольдбекк («Galilei's Atomistik», Biblioth. math. 3. Folge Bd. III Heft 1) недавно показал, что этот революционный ум не был совсем свободен от влияний античной древности и средневековья. В особенности в первом дне диалогов мы находим подробное изложение об атомистических рассуждениях Галилея, находящихся в очевидном противоречии с идеями Аристотеля и столь же ясно примыкающих к Герону. Эти идеи приводят его к странным рассуждениям о непрерывности и к мистико-математическим умозрениям относительно конечного и бесконечного, которые, с одной стороны, напоминают Николая Кузанского, а с другой не менее живо напоминают и некоторые современные математические исследования, тоже не совсем свободные от мистики. То, что Галилей не во всех своих мыслях сумел достичь полной ясности, столь же мало может нас удивлять, как и его остановки перед парадоксом, стимулирующую и выясняющую силу которого должен был испытать каждый мыслитель. (См. прилож., добавление 5.)

2. Работы Гюйгенса

1. Гюйгенс является во всех отношениях достойным преемником Галилея. Если философские способности его уступали, может быть, способностям Галилея, то зато он превосходил последнего своим геометрическим талантом. Он не только развил далее исследования, начатые Галилеем, но разрешил также первые задачи *динамики* многих масс, между тем как Галилей ограничивался исключительно динамикой *одного* тела.

Множество открытий Гюйгенса содержится уже в его книге «Horologium oscillatorium», обнародованной в 1673 году. Вот важнейшие темы, обсуждаемые здесь впервые: учение о центре колебания, изобретение и конструкция часов с маятником, изобретение часового баланса, определение ускорения силы тяжести g наблюдением колебаний маятника,

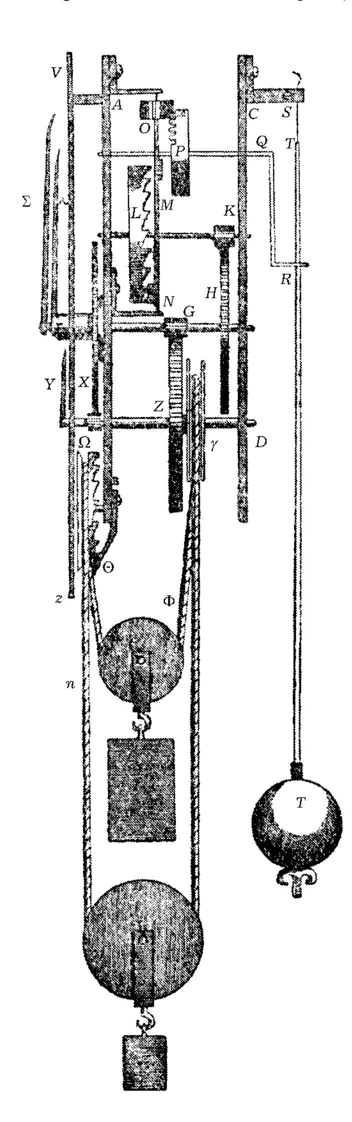


Портрет Гюйгенса

предложение применения длины секундного маятника в качестве единицы длины, правила относительно центробежной силы, механические и геометрические свойства циклоиды, учение об эволютах и круге кривизны.

2. Что касается формы изложения, то Гюйгенс не уступает Галилею в благородной и беспримерной полной честности. Он совершенно

откровенно излагает пути, приведшие его к его открытиям и тем облегчает читателю полное понимание их. Да и нет ему вовсе надобности скрывать эти пути. Если и по истечении тысячелетия будет еще видно, что он был человеком, то вместе с тем заметят также, *что* он *за* человек был. Но в нашем обсуждении работ Гюйгенса мы вынуждены держаться несколько иного метода, чем при изложении работ Галилея. Рассуждения этого последнего мы могли почти без изменений сообщить в их классической простоте. С работами Гюйгенса так поступить невозможно. Он обсуждает задачи гораздо более сложные, его математические методы и обозначения начинают становиться недостаточными и тяжеловесными. Краткости ради мы будем поэтому излагать все в более современной форме, но с сохранением существенных и основных идей Гюйгенса.



Часы Гюйгенса с маятником

3. Начнем с исследований о центробежной силе. Раз усвоено положение, установленное Галилеем, что всякая сила определяет какое-нибудь ускорение, то становится неизбежной мысль, что каждое *изменение* какой-нибудь скорости, а, следовательно, и каждое изменение какого-нибудь *направления* движения (ибо это последнее определяется тремя перпендикулярными друг к другу составляющими скорости), должно сводить к какой-нибудь силе. Поэтому, если какое-нибудь тело (камень, например) равномерно вращается в круге на натянутой нити, то это движение по кривой можно объяснить только действием постоянной силы, отклоняющим тело от прямолинейного пути. Сила эта есть натя-

жение нити, и этой силой тело постоянно отклоняется от прямолинейного пути к центру круга. Натяжение нити представляет, следовательно, центростремительную силу. С другой стороны, натяжение нити действует также на ось или на неподвижный центр круга и в этом смысле оно представляет силу центробежную.

Представим себе теперь тело, которому однажды была сообщена скорость и которое с тех пор удерживается в равномерном круговом движении ускорением, направленным всегда к центру круга. Рассмотрим теперь, от чего зависит это ускорение. Представим себе, что по двум равным кругам (рис. 102) равномерно двигаются два тела, скорости которых в I и II относятся как 1 : 2. Если будем рассматривать в обоих кругах один и тот же элемент дуги, соответствующий очень маленькому углу α, то и соответствующий элемент пути s, по которому тело действием центростремительного ускорения удаляется от прямолинейного пути (касательная) будет одним и тем же. Если обозначим через φ_1 и φ_2 соответствующие ускорения, через τ и $\frac{\tau}{2}$ соответствующие элементы времени для угла α, то мы на основании закона Галилея найдем:

$$\varphi_1 = \frac{2s}{\tau^2}, \quad \varphi_2 = 4\frac{2s}{\tau^2} \quad \text{и, следовательно,} \quad \varphi_2 = 4\varphi_1.$$

Обобщая изложенное, мы можем сказать, что в равных кругах центростремительное ускорение пропорционально квадрату скорости движения.

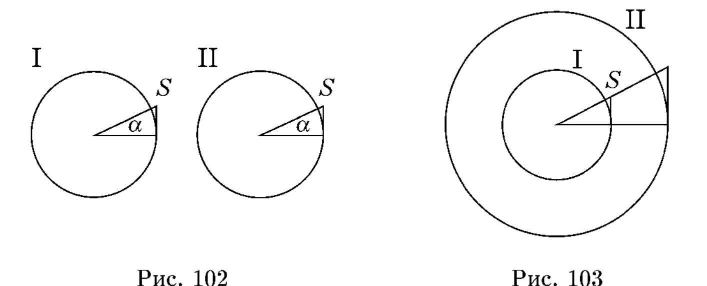


Рис. 102 Рис. 103

Рассмотрим движение в кругах I и II (рис. 103), радиусы которых относятся, как 1 : 2, и примем отношение скоростей движения тоже равным 1 : 2, так чтобы равным временам соответствовали подобные элементы дуг. Пусть φ_1, φ_2, s, $2s$ обозначают ускорения и элементы

пройденных путей, а τ — равный в обоих случаях элемент времени. Мы имеем тогда

$$\varphi_1 = \frac{2s}{\tau^2}, \quad \varphi_2 = \frac{4s}{\tau^2} \quad \text{и, следовательно,} \quad \varphi_2 = 2\varphi_1.$$

Если мы уменьшим скорость движения в круге II наполовину, так что скорость в обоих кругах станет равной, то φ_2 уменьшится в четыре раза и, следовательно, на $\frac{\varphi_1}{2}$. Обобщая сказанное, мы находим, что при *равной* скорости движения центростремительное ускорение обратно пропорционально радиусу круга.

4. Метод исследования старых исследователей был таков, что они открываемые ими принципы большей частью получали в тяжеловесной форме пропорций. Мы пойдем другим путем. На тело, движущееся со скоростью v, действует сила, сообщающая ему в элемент времени τ перпендикулярно к направлению движения ускорение φ. Новая составляющая скорости будет $\varphi\tau$ и сложение ее с прежней скоростью дает новое направление скорости, образующее с первоначальным угол α. Представляя себе движение происходящим в круге с радиусом r и вследствие *малой величины элемента угла* принимая $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$, мы получаем следующее полное выражение для центростремительного ускорения равномерного движения по кругу:

$$\frac{\varphi\tau}{v} = \operatorname{tg}\alpha = \alpha = \frac{v\tau}{r} \quad \text{или} \quad \varphi\frac{v^2}{r}.$$

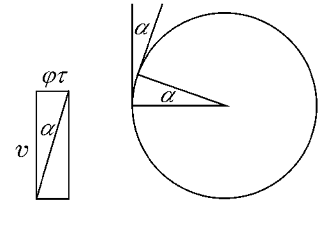



Рис. 104

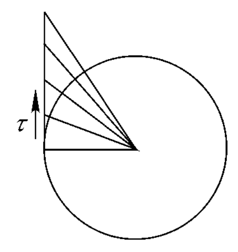


Рис. 105

Представление равномерного движения по кругу, обусловленного постоянным центростремительным ускорением, имеет в себе нечто парадоксальное. Парадоксальность заключается в допущении постоянного

ускорения к центру без действительного приближения к нему и без приращения скорости. Но эта парадоксальность становится меньше, если принять в соображение, что, не будь этого центростремительного ускорения, происходило бы постоянное удаление движущегося тела от центра, что направление ускорения постоянно изменяется и что изменение скорости (как это обнаружится при обсуждении принципа живых сил) бывает связано с приближением друг к другу вызывающих ускорение тел, чего здесь нет. Более сложный случай движения по эллипсу может быть выяснен в этом же направлении.

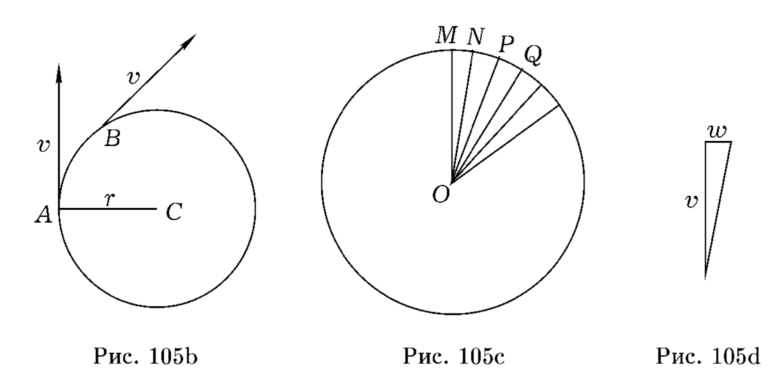


Рис. 105b Рис. 105c Рис. 105d

Приведем еще ясный вывод выражения для центробежного ускорения, основанный на принципе годографа Гамильтона. Если тело движется равномерно по кругу (рис. 105b) радиуса r, то скорость v переходит в точке пути A вследствие притяжения нити в равновеликую скорость v другого направления в точке B. Нанесем все скорости, последовательно достигаемые телом, по величине и направлению в точке O (рис. 105 c), и эти отрезки нам представят все радиусы v круга. Для того чтобы OM перешло в ON, к первому отрезку должна прибавиться перпендикулярная к нему составляющая MN. По направлениям радиусов r скорость в течение одного оборота T *равномерно* возрастает на $2\pi v$. Таким образом, радиальное ускорение $\varphi = \frac{2\pi v}{T}$

$$\text{и так как } vT = 2\pi r, \text{ то } \varphi = \frac{v^2}{r}.$$

Если к $OM = v$ присоединяется очень маленькая составляющая w (рис. 105d), то получается, строго говоря, скорость $\sqrt{v^2 + w^2} = v + \frac{w^2}{2v}$,

что мы получаем при приблизительном извлечении квадратного корня. Но в случае *непрерывного* отклонения $\frac{w^2}{2v}$ становится бесконечно мало сравнительно с v и может быть отброшено; тогда изменяется только направление, но не величина скорости.

5. Выражение для центростремительного или центробежного ускорения $\varphi = \frac{v^2}{r}$ легко может быть приведено еще и в другую форму. Обозначим через T время одного оборота по кругу и тогда $vT = 2r\pi$, а следовательно, $\varphi = \frac{4r\pi^2}{T^2}$. В этой форме мы будем употреблять это выражение впоследствии. Если по кругам движется несколько тел с равным временем одного оборота, то соответствующие центростремительные ускорения, которыми они удерживаются в данных направлениях, как это видно из последнего выражения, пропорциональны радиусам кругов.

6. Явления, иллюстрирующие приведенные выше рассуждения, как отрывание недостаточно крепких нитей, натянутых движением привязанных к ним тел, плоская форма мягких вращающихся шаров и т. д., общеизвестны. С помощью своего воззрения Гюйгенс сумел тотчас же объяснить целый ряд явлений. Когда, например, в часах с маятником, привезенных Richer (1671–1673) из Парижа в Каенну, оказался замедленный ход, Гюйгенс вывел из более значительного центробежного ускорения вращающейся Земли на экваторе мнимое уменьшение ускорения тяжести g, и наблюдение тотчас же стало понятным.

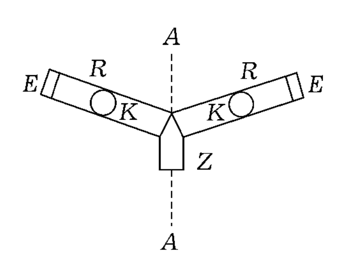


Рис. 106

Упомянем ввиду его исторического интереса еще об одном относящемся сюда эксперименте. Когда Ньютон развил свою теорию всемирного тяготения, Гюйгенс принадлежал к огромному числу тех, которые не могли примириться с идеей действия на расстоянии. Ему казалось, что явление тяготения скорее можно объяснить быстро движущимися частицами какой-нибудь среды. Если в какой-нибудь сосуд, до краев наполненный какой-нибудь жидкостью, поместить несколько легких тел, если, например, в воду поместить деревянные шарики, и привести сосуд во вращательное движение вокруг какой-нибудь оси, то деревянные шарики начинают двигаться по направлению к этой оси. Если, например, стеклянную трубку RR с деревянными шариками KK при помощи

втулки Z поместить на вращательный аппарат и вращать его около вертикальной оси, то шарики начинают удаляться от оси, двигаясь косо вверх. Но если трубка наполнена водой, то каждое вращение заставляет шарики, плавающие в концах трубки EE, двигаться по направлению к оси. Явление просто объясняется по аналогии с принципом Архимеда. Шарики испытывают центростремительное давление вверх, равное и противоположное тому давлению, которое производит на вытесненную жидкость центробежная сила. Еще Декарт предполагал объяснить таким образом центростремительное давление вверх плавающих тел в среде, находящейся в вихревом движении. Но Гюйгенс основательно замечает, что в таком случае нужно было бы принять, что *легчайшие* тела должны испытывать *сильнейшее* центростремительное давление вверх и что вообще все тяжелые тела должны быть легче, чем вихревая среда. Гюйгенс далее замечает, что аналогичные явления должны были бы наблюдаться и на *любых* телах, не участвующих в вихревом движении, т. е. телах, не обладающих центробежной силой и находящихся в среде вращающейся и, следовательно, обладающей центробежной силой. Шарик, например, из какого угодно вещества, движущийся только на *неподвижном* радиусе (проволоке), движется в вихревой среде к оси вращения.

Гюйгенс помещает в закрытый сосуд с водой кусочки сургуча, которые *немного* тяжелее, чем вода, и потому опускаются на дно. Если привести сосуд во вращательное движение, кусочки сургуча собираются на самом крае сосуда. Если же внезапно остановить вращение сосуда, то вода продолжает далее вращаться, между тем как кусочки сургуча, соприкасающиеся с дном сосуда и быстрее задержанные в своем движении, начинают двигаться к оси сосуда. В этом процессе Гюйгенс видел картину действия силы тяжести. Вращающийся в одном направлении эфир не удовлетворял, по-видимому, его потребности. Последний должен был бы, по его мнению, в конце концов увлечь в своем движении все. Поэтому он принимал, что частицы эфира быстро двигаются по всем направлениям, но при этом должен сам собою установиться, по его мнению, в замкнутом пространстве перевес круговых движений над радиальными. Этот эфир казался ему вполне достаточным для объяснения явлений тяжести. Подробное изложение этой кинетической теории тяжести можно найти в работе Гюйгенса «Ueber die Ursache der Schwere» [«О причине тяжести»] (deutch von Meves, Berlin, 1893). См. также Lasswitz, «Geschichte der Atomistik», 1890, II Band, стр. 344.

7. Прежде чем перейти к исследованиям Гюйгенса относительно центра колебания, мы займемся сначала несколькими более общими, совершенно элементарными, но зато весьма наглядными рассуждениями относительно маятникообразного и колебательного движения вообще.

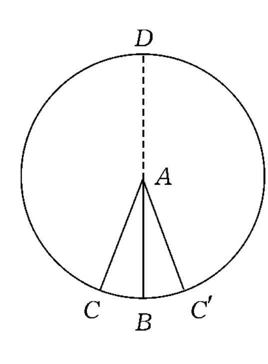


Рис. 107

Некоторые особенности маятникообразного движения были известны уже Галилею. Что он создал себе представление, которое мы изложим ниже, или что он был, по крайней мере, весьма недалек от него, доказывают некоторые намеки, разъясненные в его диалогах. Тело нитяного маятника длины l движется по кругу (рис. 107) радиуса l. Если маятник незначительно отклонить, то он станет пробегать при своих колебаниях очень небольшую дугу, близко совпадающую с соответственной хордой. Но хорда CB проходится в то же время, что и вертикальный диаметр $BD = 2l$. Если время падения t, то $2l = g\frac{t^2}{2}$ и, следовательно, $t = 2\sqrt{\frac{l}{g}}$. Так как за точкой B движение вдоль BC^1 совершается в то же время, то время одного колебания от C до C^1, т. е. $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}$. Таким образом, даже из этого грубого воззрения можно вполне правильно получить *форму* закона маятника. Точное выражение для продолжительности очень малых колебаний, как известно, таково: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{2}}$.

Движение тела маятника можно также рассматривать, как частный случай движения по наклонной плоскости. Если нить маятника образует угол α с вертикалью, то тело маятника получает ускорение $g\sin\alpha$ к положению равновесия. Для *малых* углов α $g\alpha$ есть выражение этого ускорения и это последнее, следовательно, пропорционально отклонению и всегда направлено в противоположную сторону. При *малых* отклонениях можно пренебречь кривизной пути.

8. После этих предварительных объяснений мы положим в основу нашего исследования колебательного движения другую *более простую схему*. Пусть тело может двигаться по прямой CA (рис. 108) и постоянно получает ускорение к точке O, пропорциональное расстоянию, на котором оно находится от этой точки. Изобразим наглядно эти ускорения

через восстановленные в соответственных местах ординаты. Ординаты, направленные вверх, пусть обозначают ускорения влево, а ординаты, направленные вниз, — ускорения вправо. Предоставленное самому себе в A, тело двигалось бы с неравномерным ускорением в точку O и оттуда в A_1, причем $OA_1 = OA$, оттуда вернулось бы в точку O и т. д. Прежде всего легко получить независимость продолжительности колебания (времени движения по AOA_1) от амплитуды колебания (расстояния OA). Для этой цели мы представляем себе в I и II то же самое колебание с однократной и двойной амплитудой колебания. Так как ускорение изменяется от точки к точке, то мы делим OA и $O^1A^1 = 2OA$ на равное и очень большое число элементов. Каждый элемент A^1B^1 от O^1A^1 будет в два раза больше соответственного элемента AB от OA.

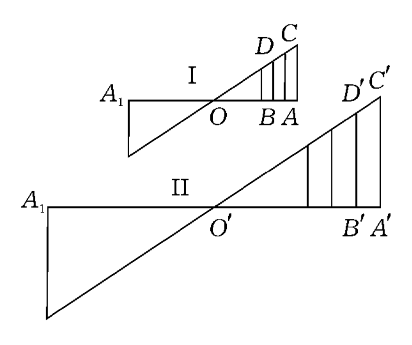


Рис. 108

Между начальными ускорениями φ и φ^1 существует отношение $\varphi^1 = 2\varphi$. Вследствие этого элементы AB и $A^1B^1 = 2AB$ проходятся с соответственными ускорениями φ и 2φ в одно и то же время τ. Конечные скорости v и v^1 в I и II для первого элемента будут $v = \varphi\tau$ и $v^1 = 2\varphi\tau$ и, следовательно, $v^1 = 2v$. Следовательно, ускорения и начальные скорости относятся друг к другу в B и B^1 тоже, как $1 : 2$. Вследствие этого и последующие соответственные элементы тоже проходятся в то же самое время, и то же самое можно сказать о каждой последующей паре элементов. Обобщая сказанное, мы познаем независимость продолжительности колебания от его амплитуды.

Представим себе теперь два колебательных движения I и II (рис. 109) с равной амплитудой. Но в II пусть тому же расстоянию от O соответствует в четыре раза большее ускорение. Разделим всю амплитуду колебания в I и II, т. е. AO и $A^1O^1 = OA$ на одно и то же очень большое число частей. Части эти в I и II будут равны. Пусть начальные ускорения в A и A^1 будут φ и 4φ, элементы пути $AB = A^1B^1 = s$, а вре-

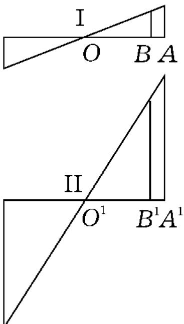


Рис. 109

мена соответственно τ и τ^1. Мы получаем $\tau = \sqrt{\frac{2s}{\varphi}}$, $\tau^1 = \sqrt{\frac{2s}{4\varphi}} = \frac{\tau}{2}$. Элемент A^1B^1 проходится, следовательно, в течение половины времени сравнительно с элементом AB. Конечные скорости v и v^1 в B и B^1 будут $v = \varphi\tau$ и $v^1 = 4\varphi\frac{\tau}{2} = 2v$. Таким образом, начальные скорости в B и B^1 относятся как 1 : 2, а ускорения — как 1 : 4, и поэтому следующий элемент в II снова будет пройден в половину того времени, в которое будет пройден соответственный элемент в I. Обобщая сказанное, мы находим, что при данных равных амплитудах продолжительность колебания обратно пропорциональна квадратному корню из ускорения.

9. Изложенные здесь рассуждения могут получить весьма сокращенную и общую форму, если применить к ним метод рассмотрения, впервые примененный Ньютоном. Ньютон называет *подобными* такие материальные системы, которые имеют геометрически подобные формы и гомологичные массы которых находятся в том же отношении. Он говорит далее, что такие системы совершают подобные движения, если гомологичные точки их описывают в пропорциональные времена подобные пути. Следуя современной геометрической терминологии, можно такие механические образования (5-ти измерений) называть *подобными* только тогда, когда в *одном и том же отношении* находятся не только гомологичные линейные измерения, но и времена и массы. Более подходит для таких образований название *родственных* друг другу образований.

Сохраним, однако, название форономически *подобных* образований и в ближайшем исследовании совсем не будем принимать во внимание масс.

Итак, пусть в случае двух подобных движений гомологичные пути будут s и αs, гомологичные времена — t и βt. Тогда гомологичные скорости будут: $v = \frac{s}{t}$ и $\gamma v = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{s}{t}$, а гомологичные ускорения: $\varphi = \frac{2s}{t^2}$ и $\varepsilon\varphi = \frac{\alpha}{\beta^2} \cdot \frac{2s}{t^2}$.

Легко заметить, что колебания, которые тело совершает при принятых выше условиях с двумя различными амплитудами I и α, суть движения *подобные*. Заметим теперь, что отношения гомологичных уско-

рений $\varepsilon = \alpha$, и мы найдем, что $\alpha = \frac{\alpha}{\beta^2}$ и отношение гомологичных времен, а следовательно, и времен колебания, $\beta = \pm 1$. Мы получаем, следовательно, независимость продолжительности колебания от его амплитуды.

Если мы примем отношение амплитуд в двух колебательных движениях равным $1 : \alpha$ и отношение ускорений равным $1 : \alpha\mu$, мы найдем $\varepsilon = \alpha\mu = \frac{\alpha}{\beta^2}$ и, следовательно, $\beta = \frac{1}{\pm\sqrt{\mu}}$, и мы, следовательно, найдем опять второй закон колебательного движения.

Два равномерных движения по кругу бывают всегда форономически подобны. Пусть отношение радиусов равно $1 : \alpha$ и отношение скоростей $1 : \gamma$; тогда отношение ускорений будет $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta^2}$ и так как $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, то $\varepsilon = \frac{\gamma^2}{\alpha}$, и мы опять нашли правила центростремительного ускорения.

Нельзя не пожалеть, что подобного рода исследования механического и форономического *родства* не культивируются более, ибо они обещают самые прекрасные и самые разъясняющие расширения нашего воззрения.

10. Рассмотрим теперь отношение, существующее между равномерным движением по кругу и колебательным движением описанного только что рода. Пусть в центре круга O и в плоскости этого круга помещена прямоугольная система координат, к которой мы и относим равномерное движение по кругу. Центростремительное ускорение φ, обусловливающее это движение, мы разлагаем по направлениям X и Y и замечаем, что составляющая движения в направлении X зависит только от составляющей ускорения в направлении X. Оба движения и ускорения мы можем рассматривать, как независимые друг от друга.

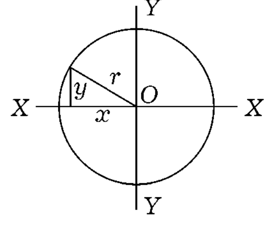


Рис. 110

Обе составляющие движения суть колебательные движения около точки O. Расстоянию x соответствует составляющая ускорения $\varphi\frac{x}{r}$ или $\frac{\varphi}{r}\cdot x$ в направлении к точке O. Ускорение, следовательно, *пропорционально* расстоянию, и движение, следовательно, есть движение именно того рода, который мы только что исследовали. Продолжительность T одного колебания есть вместе с тем время одного оборота в круговом движении. О послед-

нем же мы знаем, что $\varphi = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ и, следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{\varphi}}$. Далее $\frac{\varphi}{r}$ есть ускорение при $x = 1$, т. е. ускорение, соответствующее единице отклонения, которое мы кратко и обозначим буквой f. Мы можем, следовательно, для колебательного движения принять $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{f}}$. Так как за продолжительность одного колебания принимают обыкновенно время движения от положения равновесия до крайней точки и обратно, то $T = \pi\sqrt{\frac{1}{f}}$.

11. Все это может быть сейчас же применено к колебаниям маятника с *очень малой* амплитудой, где мы можем сохранить развитое здесь воззрение, не принимая во внимание кривизны пути. Для угла отклонения α расстояние тела маятника от положения равновесия будет $l\alpha$, соответствующее ускорение $g\alpha$ и, следовательно,

$$f = \frac{g\alpha}{l\alpha} = \frac{g}{l} \quad \text{и} \quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Отсюда видно, что продолжительность колебания прямо пропорциональна квадратному корню из длины маятника и обратно пропорциональна квадратному корню из ускорения тяжести. Следовательно, маятник, длина которого в четыре раза больше секундного маятника, совершит одно колебание в две секунды. Секундный маятник, удаленный от поверхности Земли на длину, равную радиусу Земли, т. е. с ускорением $\frac{g}{4}$, тоже совершит одно колебание в две секунды.

12. Зависимость продолжительности колебания от длины маятника может быть очень легко доказана экспериментально. Если маятники a, b, c (рис. 111), подвешенные в двух точках для получения одной плоскости колебания, имеют длины 1, 4, 9, то маятник a совершает два колебания в то время, как маятник b совершает одно колебание, и три колебания в то время, в которое маятник c совершает одно колебание.

Несколько труднее доказательство зависимости продолжительности колебания от ускорения силы тяжести g, ибо последнее не может быть изменено произвольно. Но доказательство все же удается, если заставить действовать на маятник только составляющую от ускорения g. Если представить себе ось колебания маятника AA в вертикально помещенной плоскости бумаги, то линия EE будет линия пересечения плоскости колебания с плоскостью бумаги и вместе с тем поло-

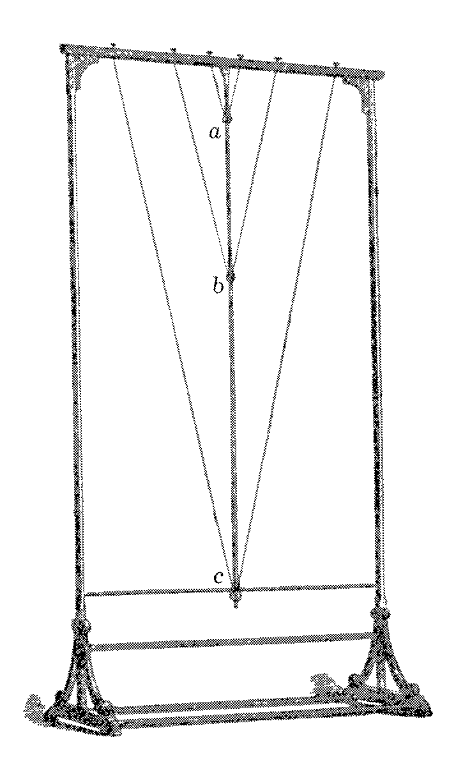


Рис. 111

жение равновесия маятника. Ось образует с горизонтальной плоскостью и плоскость колебания с вертикальной плоскостью угол β, вследствие чего в этой плоскости будет действовать ускорение $g\cdot\cos\beta$. Если маятник получит небольшое отклонение α в плоскости колебания, то соответствующее ускорение будет $\alpha(g\cos\beta)$ и, следовательно, продолжительность колебания $T = \pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\beta}}$.

Отсюда ясно, что с возрастанием β ускорение $g\cos\beta$ становится меньше и в соответствии с этим возрастает продолжительность колебания. Опыт легко произвести с аппаратом, изображенным на рис. 113. Рама RR может вращаться на шарнире у C, может быть наклонена и совсем повернута в горизонталь-

A E β A β E

Рис. 112

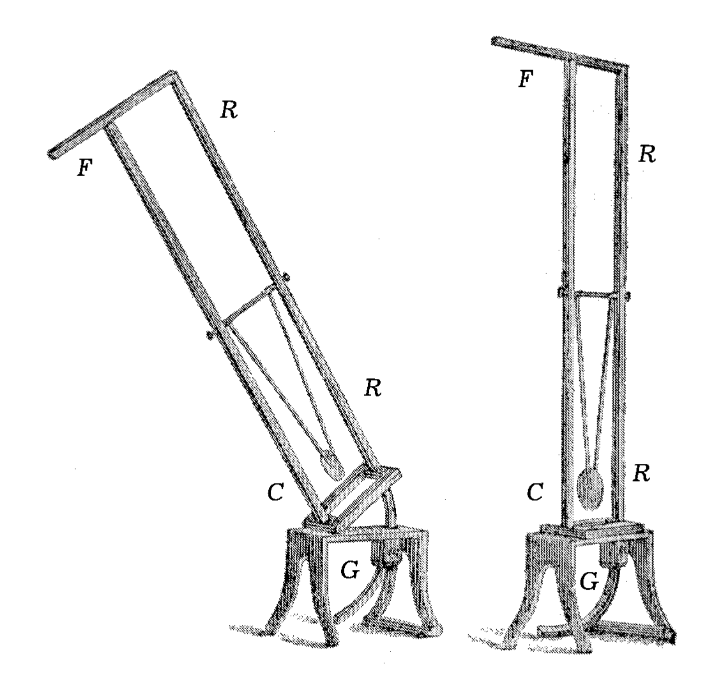


Рис. 113

ное положение. Угол наклона рамы определяется по шкале, нанесенной на дуге G, при помощи винта. С увеличением β увеличивается и продолжительность колебания. Если сделать плоскость колебания горизонтальной, причем R покоится на ножке F, то продолжительность колебания становится бесконечно великой. Маятник тогда вообще не возвращается в какое-нибудь определенное положение, а совершает много полных оборотов в одном и том же направлении, пока вся его скорость не истрачивается на трение.

13. Если движение маятника происходит не в одной *плоскости*, а вообще в *пространстве*, то нить маятника описывает поверхность конуса. Движение конического маятника тоже исследовано Гюйгенсом. Рассмотрим один простой относящийся сюда случай. Пусть маятник длины l выведен из положения равновесия на угол α, пусть телу его сообщена скорость v перпендикулярно к плоскости отклонения маятника, после чего он предоставлен самому себе. Маятник будет двигать-

ся в горизонтальном круге, если развитое центробежное ускорение как раз уравновешивает ускорение силы тяжести g, т. е. если результирующее ускорение падает в направлении нити маятника. Но тогда $\frac{\varphi}{g} = \operatorname{tg}\alpha$. Если T означает время одного оборота, то $\varphi = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ или $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{\varphi}}$. Если введем $\frac{r}{\varphi} = \frac{l\sin r}{g\operatorname{tg}\alpha} = \frac{l\cos\alpha}{g}$, мы найдем следующее выражение для одного оборота маятника: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$. Соответствующая скорость v будет $v = \sqrt{r\varphi}$, а так как $\varphi = g\operatorname{tg}\alpha$, то $v = \sqrt{gl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. Для очень небольших углов отклонения конического маятника мы можем принять $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Эта формула вполне совпадает с обыкновенной формулой маятника, если принять в соображение, что *один* оборот конического маятника соответствует *двум* колебаниям обыкновенного маятника.

14. На основании наблюдений над маятником Гюйгенс первый предпринял точное определение ускорения силы тяжести g. Из формулы $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ для нитяного маятника с небольшим шариком прямо получается $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$. Для географической широты 45° находят величину g в метрах и секундах равной 9,806.

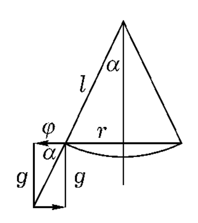


Рис. 114

Для временных вычислений в уме достаточно заметить себе, что ускорение силы тяжести составляет около 10 м/с.

15. Всякий вдумчивый человек, недостаточно еще знакомый с основами механики, задается вопросом, как можно получить продолжительность колебания, т. е. *время*, делением числа, выражающего *длину*, на число, выражающее *ускорение*, и извлечением квадратного корня из частного. Мы должны при этом принять во внимание, что $g = \frac{2s}{t^2}$, т. е. ускорение есть длина, разделенная на квадрат времени, так что продолжительность колебания T, собственно говоря, выражается так: $T = \pi\sqrt{\frac{l}{2s}t^2}$. Так как $\frac{1}{2s}$ есть отношение двух длин и, следовательно, отвлеченное число, то под корнем мы имеем квадрат времени. Само собой разумеется, что T будет обозначать секунды только в том случае, если и при определении g мы возьмем за единицу времени секунду.

Из формулы $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$ непосредственно видно, что g есть длина, разделенная на квадрат времени, как это и соответствует природе ускорения.

16. Важнейшей работой Гюйгенса было решение задачи, заключающейся в определении центра колебания. Покуда дело идет о динамике *одного только* тела, принципы Галилея вполне достаточны. Но в этой задаче приходится определять движение *многих* тел, взаимно влияющих друг на друга. Без помощи *нового* принципа это сделано быть не может, и такой принцип был найден Гюйгенсом.

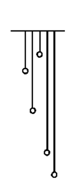


Рис. 115

Мы знаем, что более длинные нитяные маятники совершают свое колебание медленнее и более короткие — быстрее. Представим себе какое-нибудь тяжелое тело, которое может вращаться около какой-нибудь оси, но центр тяжести которого лежит вне этой последней, и мы получим сложный маятник. Каждая часть его массы, существуй она одна на этом самом расстоянии от оси, имела бы свою собственную продолжительность колебания. Но вследствие связи всех частей все тело может колебаться только с одной определенной продолжительностью колебания. Если мы представим себе много нитяных маятников не равной длины, то более короткие будут колебаться быстрее, а более длинные — медленнее. Когда же все они связаны в один маятник, то колебания более длинных маятников, следует полагать, ускоряются, а колебания более коротких замедляются и в результате получается одна средняя продолжительность колебания. Должен поэтому существовать один простой маятник, длина которого есть нечто среднее между длиной самого короткого и длиной самого длинного маятника и который имеет ту же продолжительность колебания, что и маятник сложный. Если мы отнесем длину этого простого маятника на маятнике сложном, мы получим точку, которая, будучи связана с остальными, сохраняет ту же продолжительность колебания, которую она имела бы и без этой связи. Вот эта точка и есть центр колебания. Мерсенн первый поставил задачу определения центра колебания. Решение этой задачи, данное Декартом, было однако слишком поспешно и недостаточно.

17. Гюйгенс первый дал общее решение этой задачи. Кроме него над решением ее работали почти все выдающиеся естествоиспытатели того времени, и можно сказать, что в ходе этой работы были развиты важнейшие принципы современной механики.

Новая мысль, из которой исходит Гюйгенс и которая гораздо важ-

нее, чем вся задача, заключается в следующем. Как бы ни изменялись движения масс маятника вследствие взаимного воздействия их друг на друга, во всяком случае скорости, достигнутые движением маятника вниз, могут быть только такие, при которых центр тяжести масс — безразлично, связаны ли они между собой, или нет — может *подниматься* только *так высоко*, как он *опустился вниз*. Когда его современники усомнились в правильности этого принципа, Гюйгенс был вынужден заметить, что этим принимается только то, что тяжелые тела не могут сами двигаться вверх. Если бы центр тяжести масс, падающих вниз связанными, мог подниматься после разрушения этой связи выше, чем он упал, то была бы возможность повторением этого процесса поднимать произвольно высоко тяжелые тела при помощи собственного их веса. Если бы центр тяжести после разрушения связи между массами поднимался лишь на меньшую высоту, чем та, на которую он упал, то той же цели можно было бы достичь, только повернув направление процесса. Таким образом, то, что утверждает Гюйгенс, ни в ком собственно никогда не возбуждало сомнений, а, напротив, всяким было познано *инстинктивно*. Но Гюйгенс дал этому инстинктивному познанию *логическую* форму. Он не забывает также указать с этой точки зрения на бесплодность стараний отыскать perpetuum mobile. В развитом здесь принципе мы узнаем *обобщение мысли Галилея*.

18. Рассмотрим теперь, что дает нам этот принцип при определении центра колебания. Пусть OA есть, простоты ради, линейный маятник, состоящей из многих масс, обозначенных точками. Предоставленный самому себе в OA, он через точку B перемещается в OA', причем $AB = BA'$. Его центр тяжести S на другой стороне поднимется столь же высоко, насколько он на одной стороне опустился. Из этого еще не следует ничего. Но если бы в положении OB отдельные массы вдруг были освобождены от их связей, центры тяжести их со скоростями, которые сообщили им эти связи, могли бы достичь тоже только той же высоты. Если мы остановим свободно колеблющиеся массы на *наибольшей их высоте*, то более короткие маятники окажутся ниже линии OA', а более длинные — выше ее, но центр тяжести всей системы останется на OA' в прежнем своем положении.

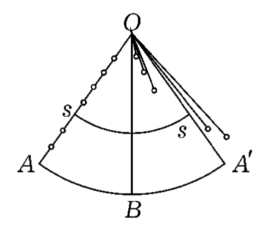


Рис. 116

Но мы замечаем, что сообщенные скорости пропорциональны рас-

стояниям от оси, так что с указанием *одной* определены все остальные и высота поднятия центра тяжести дана. И наоборот, скорость всякой массы дана, раз известна высота центра тяжести. Когда же известна в каком-нибудь маятнике скорость, соответствующая какой-нибудь глубине падения, то известно все движение его.

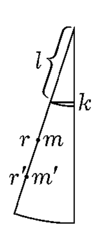


Рис. 117

19. После этих замечаний мы можем перейти к рассмотрению самой задачи. Вырежем из линейного сложного маятника часть $= l$ от оси. Если маятник перемещается из крайнего своего положения в положение равновесия, то точка его, находящаяся на расстоянии $= l$ от оси, падает на величину k. Массы m, m', m'', ... на расстояниях r, r', r'', ... получат при этом глубины падения rk, $r'k'$, $r''k''$, ... и глубина падения центра тяжести будет:

$$\frac{mrk + m'r'k' + m''r''k'' + \cdots}{m + m' + m'' + \cdots} = \frac{k\sum mr}{\sum m}.$$

Пусть точка, находящаяся на расстоянии $= l$ от оси, получает при прохождении через положение равновесия неопределенную еще скорость v. Высота ее подъема после разрушения связи между массами будет $\frac{v^2}{2g}$. Соответствующие высоты поднятия других масс будут $\frac{(rv)^2}{2g}$, $\frac{(r'v)^2}{2g}$, $\frac{(r''v)^2}{2g}$, ... Высота подъема центра тяжести свободных масс будет:

$$\frac{m\frac{(rv)^2}{2g} + m'\frac{(r'v)^2}{2g} + m''\frac{(r''v)^2}{2g} + \cdots}{m + m' + m'' + \cdots} = \frac{v^2}{2g}\frac{\sum mr^2}{m}.$$

Согласно же основному принципу Гюйгенса,

$$k\frac{\sum mr}{\sum m} = \frac{v^2}{2g}\frac{\sum mr^2}{\sum m}. \qquad (1)$$

Этим дано отношение между глубиной падения k и скоростью v. Но так как все движения маятника с равными амплитудами форономически подобны, то и исследуемое движение этим вполне определено.

Чтобы найти длину простого маятника, имеющего с предложенным сложным маятником одну и ту же продолжительность колебания,

заметим, что между его глубиной падения и скоростью должно существовать то же отношение, какое существует при свободном падении. Если y есть длина этого маятника, то ky будет его глубина падения и vy — его скорость, так что

$$\frac{(vy)^2}{2g} = ky$$

или

$$y \cdot \frac{v^2}{2g} = k. \tag{2}$$

Если перемножить уравнения (1) и (2), то находим, что

$$y = \frac{\sum mr^2}{\sum mr}.$$

Пользуясь форономическим подобием, мы можем поступать и иначе. Из уравнения (1) мы находим,

$$v = \sqrt{2gk} \cdot \sqrt{\frac{\sum mr}{\sum mr^2}}.$$

Простой маятник с длиной l имеет при соответствующих условиях скорость $v_1 = \sqrt{2gk}$.

Если мы обозначим продолжительность колебания сложного маятника через T, а ту же продолжительность простого маятника с длиной l через $T_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то, сохраняя допущение о равных амплитудах, мы находим:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{v_1}{v} \quad \text{и, следовательно,} \quad T = \pi\sqrt{\frac{\sum mr^2}{g\sum mr}}.$$

20. Нетрудно видеть, что в принципе Гюйгенса содержится познание, что *работа определяет скорость или, точнее, так называемую живую силу.* Под живой силой системы масс m, m_1, $m_2, \ldots$ с соответственными скоростями v, v_1, $v_2, \ldots$ мы понимаем сумму

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \cdots .$$

Принцип Гюйгенса тождествен с принципом живых сил. То, что к этому прибавили позднейшие исследователи, не столько относится к самой мысли, сколько к форме ее выражения.

Возьмем теперь совершенно общий случай. Представим себе систему грузов p, p', p'', ..., которые, в связи друг с другом или без этой связи, падают на расстояния h, h', h'', ... и достигают при этом скоростей v, v', v'', ... Согласно принципу Гюйгенса, существует равенство *глубин падения и высот поднятия* центра тяжести, а следовательно, и уравнение

$$\frac{ph + p'h' + p''h'' + \cdots}{p + p' + p'' + \cdots} = \frac{p\frac{v^2}{2g} + p'\frac{v'^2}{2g} + p''\frac{v''^2}{2g} + \cdots}{p + p' + p'' + \cdots}$$

или

$$\sum ph = \frac{l}{g}\sum \frac{pv^2}{2}.$$

Раз получено понятие «массы», которого не хватало еще Гюйгенсу в его исследованиях, то можно $\frac{p}{g}$ заменить массой m, и мы получаем тогда уравнение $\sum ph = \frac{1}{2}\sum mv^2$, которое легко обобщить для сил непостоянных.

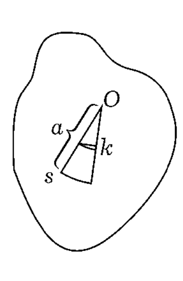


Рис. 118

21. С помощью принципа живых сил мы можем определить продолжительность бесконечно малых колебаний какого угодно маятника. Из центра тяжести s мы опускаем перпендикуляр на ось; пусть длина его будет a. На этом перпендикуляре мы отрезаем часть от оси $= l$. Пусть глубина падения соответственной точки до положения равновесия будет k и v достигнутая скорость. Так как работа падения определяется движением центра тяжести, то мы имеем, что работа падения равна живой силе, т. е.

$$akgM = \frac{v^2}{2}\sum mr^2.$$

При этом мы обозначаем через букву M всю массу маятника и вводим выражение живой силы. Рассуждая, как и раньше, мы находим

$$T = \pi\sqrt{\frac{\sum mr^2}{agM}}.$$

22. Итак, мы видим, что продолжительность бесконечно малых колебаний маятника определяется двумя элементами: величиной выражения $\sum mr^2$, названной Эйлером *моментом инерции* и употребляемой Гюйгенсом без особого обозначения, и величиной agM. Последнее выражение, которое мы кратко назовем *статическим моментом*, есть произведение aP, веса маятника на расстояние его центра тяжести от оси. Указанием этих двух величин определяется длина простого маятника равной продолжительности колебания (изохронного маятника) и положение центра колебания.

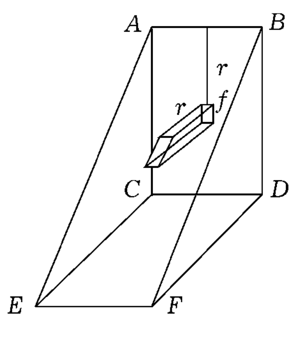


Рис. 119

Для определения соответственных длин маятника Гюйгенс за отсутствием лишь позднее найденных аналитических методов, выбирает очень остроумный геометрический способ, который мы наглядно изобразим на примерах. Пусть нам нужно определить продолжительность колебания однородного (материального и тяжелого) прямоугольника $ABCD$, колеблющегося около AB, как оси. Разделим наш прямоугольник на мелкие элементы поверхности $f, f', f'', \ldots$ с расстояниями $r, r', r'', \ldots$ от оси и мы получим следующее выражение для длины изохронного простого маятника или расстояния центра колебания от оси:

$$\frac{fr^2 + f'r'^2 + f''r''^2 + \ldots}{fr + f'r' + f''r'' + \ldots}.$$

Восстановим к $ABCD$ в C и D перпендикуляры $CE = DF = AC = BD$ и представим себе однородный клин $ABCDEF$. Отыщем расстояние центра тяжести этого клина от плоскости, параллельной $CDEF$ и проходящей через линию AB. Мы берем для этого столбики fr, $f'r'$, $f''r''$, $\ldots$, и должны определить расстояния их от названной плоскости. Мы находим при этом следующее выражение для расстояния центра тяжести:

$$\frac{fr \cdot r + f'r' \cdot r' + f''r'' \cdot r'' + \ldots}{fr + f'r' + f''r'' + \ldots},$$

т. е. то же выражение, что и раньше. Таким образом, центр колебания прямоугольника и центр тяжести клина (рис. 119) имеют одно и то же расстояние $= {}^2/_3 AC$.

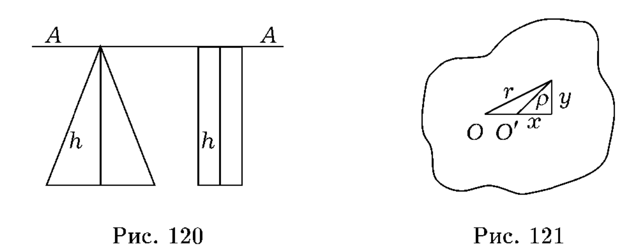


Рис. 120 Рис. 121

После этого нетрудно усмотреть правильность следующих определений. Для однородного, колеблющегося около одной стороны прямоугольника с высотой h расстояние центра тяжести от оси $= \frac{h}{2}$, но расстояние центра колебания $= {}^2/_3 h$. Для однородного треугольника с высотой h, ось которого проходит через вершину параллельно основанию, расстояние центра тяжести $= {}^2/_3 h$, а расстояние центра колебания $= {}^3/_4 h$. Обозначим моменты инерции прямоугольника и треугольника через Δ_1, Δ_2 и соответствующие массы через M_1, M_2 и мы получим

$$ {}^2/_3 h = \frac{\Delta_1}{\frac{h}{2} M_1}, \quad {}^3/_4 h = \frac{\Delta_2}{\frac{2h}{3} M_2}. $$

Следовательно,

$$ \Delta_1 = \frac{h^2 M_1}{3}, \quad \Delta_2 = \frac{h^2 M_2}{2}. $$

При помощи этого прекрасного геометрического метода можно решить еще кое-какие задачи, которые в настоящее время, правда, гораздо более удобно решаются по шаблону.

23. Рассмотрим теперь одно правило относительно моментов инерции, которым пользовался уже Гюйгенс в несколько иной форме. Пусть O есть центр тяжести какого-нибудь тела (рис. 121). Поместив в эту точку начало прямоугольной системы координат, мы представляем себе момент инерции определенным относительно оси Z. Если m обозначает элемент массы и r — его расстояние от оси, то момент инерции $\Delta = \sum mr^2$. Переместим теперь ось вращения параллельно ей самой до O' в направлении оси X на расстоянии a. Расстояние r переходит в новое расстояние ρ и новый момент инерции будет

$$ \Theta = \sum m\rho^2 = \sum m[(x-a)^2+y^2] = \sum m(x^2+y^2) - 2a\sum mx + a^2\sum m. $$

Или, так как $\sum(x^2 + y^2) = \sum mr^2 = \Delta$, затем также ввиду свойства центра тяжести $\sum mx = 0$, мы при обозначении всей массы через $M = \sum m$ имеем:

$$\Theta = \Delta + a^2 M.$$

Таким образом, из момента инерции для оси, проходящей через центр тяжести, легко вывести момент инерции для другой оси, *параллельной* первой.

24. С этим связано еще одно дальнейшее замечание. Расстояние центра колебания дано в выражении $l = \dfrac{\Delta + a^2 M}{aM}$, где Δ, M, a имеют прежнее значение. Величины Δ и M суть для данного тела величины постоянные. Поэтому покуда a сохраняет одну и ту же величину, остается постоянным и l. Для всех *параллельных* осей, находящихся на *одном и том же* расстоянии от центра тяжести, одно и то же тело имеет в качестве маятника одну и ту же продолжительность колебания. Если $\dfrac{\Delta}{M} = \varkappa$, то

$$l = \frac{\varkappa}{a} + a.$$

Так как l означает расстояние центра колебании и a — расстояние центра тяжести от оси, то центр колебания находится всегда дальше от оси, чем центр тяжести, а именно на расстоянии $\frac{\varkappa}{a}$. Таким образом, $\frac{\varkappa}{a}$ есть расстояние центра колебания от центра тяжести. Если мы первоначальную ось переместим параллельно ей самой в центр колебания, то a переходит в $\frac{\varkappa}{a}$ и мы получаем новую длину маятника

$$l' = \frac{\varkappa}{\frac{\varkappa}{a}} + \frac{\varkappa}{a} = a + \frac{\varkappa}{a} = l.$$

Таким образом, продолжительность колебания остается одной и той же для параллельной оси, проходящей через центр колебания, а следовательно, и для всякой параллельной оси, имеющей то же расстояние $\frac{\varkappa}{a}$ от центра тяжести, что и центр колебания.

Совокупность всех параллельных осей, соответствующих одной и той же продолжительности колебания с расстояниями центра тяжести a и $\frac{\varkappa}{a}$ образует два цилиндра с одной общей осью. Каждая образующая может быть заменена в качестве оси какой угодно другой без изменения продолжительности колебания.

25. Чтобы лучше обозреть связь между обоими нашими цилиндрами, которые мы назовем кратко осевыми цилиндрами, рассуждаем так: пусть $\Delta = k^2 M$ и тогда

$$l = \frac{k^2}{a} + a.$$

Отыскивая расстояние a, соответствующее данному l, т. е. данной продолжительности колебания, мы получаем

$$a = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2}.$$

Таким образом, *одной* величине l соответствуют вообще *две* величины для a. Только если $\sqrt{\frac{l^2}{4} - k^2} = 0$ и, следовательно, $l = 2k$, обе величины совпадают в $a = k$.

Обозначим две величины a, соответствующие одной величине l, через α, β, и мы имеем

$$l = \frac{k^2 + \alpha^2}{\alpha} = \frac{k^2 + \beta^2}{\beta}$$

или

$$\beta(k^2 + \alpha^2) = \alpha(k^2 + \beta^2),$$
$$k^2(\beta - \alpha) = \alpha\beta(\beta - \alpha),$$
$$k^2 = \alpha\beta.$$

Таким образом, если в каком-нибудь маятнике известны *две* параллельные оси равной продолжительности колебания и с различными расстояниями центра тяжести α, β, как это, например, бывает, когда можно указать центр колебания для одной точки привеса, то можно конструировать k. Относят α и β рядом на одной прямой, описывают полукруг с диаметром равным $\alpha+\beta$ и в точке деления частей α и β восстановляют перпендикуляр, от которого полукруг отрезает часть k (рис. 122). Когда же известно k, то для каждой величины α, например, для λ можно найти величину μ, обусловливающую ту же продолжительность колебания. Образуют из λ и k прямой угол, соединяют конечные точки этих двух катетов прямой, к которой восстановляют перпендикуляр из конечной точки k, который на продолжении λ отрезает часть μ.

Представим себе теперь произвольное тело с центром тяжести O, проведем через него плоскость чертежа и представим себе его колебания около всевозможных осей, параллельных друг к другу и перпендикулярных к плоскости чертежа. Все оси, проходящие через круг α

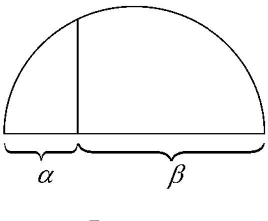


Рис. 122

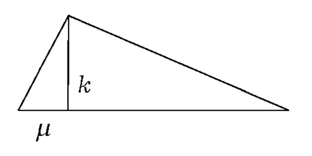


Рис. 123

(рис. 124), могут замещать как друг друга, так и те, которые проходят еще через другой круг β, не изменяя продолжительности колебания. Если мы круг α заменим меньшим кругом λ, то круг β заменится большим кругом μ. Если будем продолжать ту же замену, то оба круга в конце концов совпадут в одном круге с радиусом k.

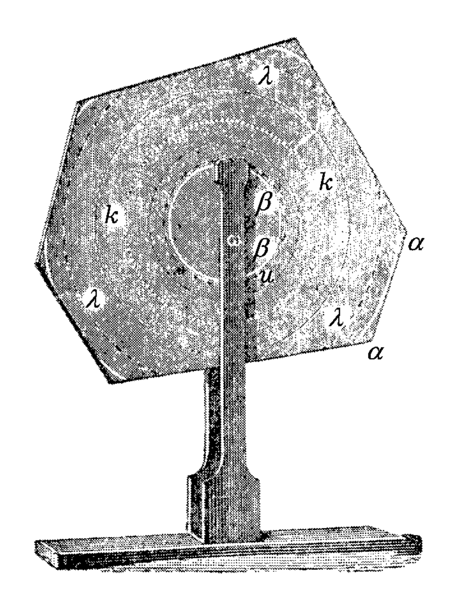


Рис. 124

26. Мы много останавливались на этих подробностях по основательным соображениям. Прежде всего мы хотели ясно показать таким образом все богатство результатов исследования Гюйгенса. Ибо все, что здесь сообщено, содержится, хотя и в несколько другой форме, в сочинениях Гюйгенса или так близко к изложенному в них, что может быть без малейшего труда дополнено. В современные элементарные учебники отсюда попала лишь очень небольшая часть. Сюда относится, например, встречающееся в элементарных учебниках правило, по которому точка привеса и центр колебания могут обмениваться местами. Но обычное изложение этого правила не исчерпывает дела. Катер, как известно, воспользовался этим правилом для точного определения длины секундного маятника.

Приведенные рассуждения сослужили нам и ту службу, что они дали нам возможность выяснить природу понятия «момент инерции».

Понятие это не дает нам ни одного принципиального познания, которого мы не могли бы получить и без него. Но это понятие делает излишним отдельное рассмотрение частей массы или осуществляет его раз навсегда, благодаря чему мы более коротким и удобным путем приходим к цели. Таким образом, это понятие имеет известное значение в *экономии механики.* После попыток Эйлера и Сегнера, увенчавшихся небольшим успехом, Пуансо развил далее относящиеся сюда мысли и ввел дальнейшее облегчение своими эллипсоидом инерции и центральным эллипсоидом.

27. Менее ценны исследования Гюйгенса геометрических и механических свойств циклоиды. Циклоидный маятник, при помощи которого Гюйгенс получил не приблизительную только, а точную независимость продолжительности колебания от его амплитуды, в настоящее время не нужен и потому он совершенно исчез из практики фабрикации часов. Мы не будем поэтому останавливаться на таких исследованиях, хотя в геометрическом отношении они представляют большой интерес.

Как бы ни были велики заслуги Гюйгенса в области самых различных физических теорий, в фабрикации часов, в области практической диоптрики и в особенности в механике, *главной его заслугой*, обнаруживающей величайший полет мысли и чреватой также позднейшими последствиями, остается провозглашение принципа, которым решалась задача о центре колебания. Но именно этот принцип не был по достоинству оценен его менее дальнозоркими современниками и много позже. Мы надеемся, что мы дали правильное освещение этому принципу, установив тождественность его с принципом живых сил.

28. Мы не можем в настоящей книге подробно останавливаться даже только на важных работах Гюйгенса в области физики. Мы упомянем только коротко о немногих из них. Он творец теории упругости света, одержавшей в конце концов победу над эмиссионной теорией Ньютона. Его внимание привлекали именно те стороны световых явлений, которые ускользнули от внимания Ньютона. В области физики он с большой ревностью защищал идею Декарта, что все явления должны быть объяснены механически, не оставаясь, однако, слепым к ошибкам его, которые он подвергал резкой и основательной критике. Его пристрастие к чисто механическим объяснениям сделало его также противником идеи Ньютона о силах, действующих на расстоянии, которые он охотнее заменил бы действиями давления и удара, т. е. действиями прикосновения. В этом стремлении он приходил к оригинальным представ-

лениям, каково, например, представление магнитного течения, которое сначала не встретило признания, ввиду большого влияния Ньютона, но огромное значение которого, благодаря непредубежденной ясности мышления Фарадея и Максвелла, встретило признание в последнее время. Гюйгенс имеет также большие заслуги как чистый геометр или математик, и в этой области остается только указать на его теорию азартных игр. Его астрономические наблюдения, его работы в области теоретической и практической диоптрики оказали существенное содействие развитию этих областей науки. Как техник он изобретатель машины, идея которой осуществлена в современных газовых машинах. Как физиолог он почти угадал аккомодацию глаза деформацией хрусталика. Всего этого мы можем здесь только слегка коснуться. Значение Гюйгенса приходится оценивать тем выше, чем полнее становятся известными его работы с опубликованием полного собрания его сочинений. Краткое и полное почтительности изложение всех работ Гюйгенса см. Bosscha, «Christian Huygens, Rede am 200. Gedächtnisstage seines Lebensendes», übersetzt von Engelmann, Leipzig, 1895.

3. Работы Ньютона

1. В области динамики у Ньютона двоякого рода заслуга. Во-первых, он весьма расширил поле зрения механической физики своим открытием *всеобщего тяготения*. Во-вторых, *он дал завершение* принятым в настоящее время *принципам механики*. После него не был более провозглашен ни один существенно новый принцип. Все, что после него было сделано в механике, относилось только к дедуктивному, формальному и математическому развитию механики на основе принципов Ньютона.

2. Бросим сначала взгляд на работы Ньютона в области *физики*. На основе наблюдений Тихо де Браге и своих собственных Кеплер вывел три эмпирических закона для движения планет вокруг Солнца, которые Ньютон сделал более понятными при помощи нового своего воззрения. Законы Кеплера таковы:

1) Планеты двигаются по эллипсам, с Солнцем в фокусе.

2) Проведенный из Солнца к какой-нибудь планете радиус-вектор описывает в равные времена равные поверхности.

3) Кубы больших осей орбит относятся друг к другу, как квадраты времен одного оборота.

Раз принята и последовательно проводится точка зрения Галилея и Гюйгенса, то *криволинейное* движение какого-нибудь тела представляется понятным только в случае существования непрерывного отклоняющего *ускорения*. Вследствие этого оказывается необходимость отыскивать такое ускорение для движения планет — ускорение, которое должно быть всегда направлено к вогнутой стороне орбиты.

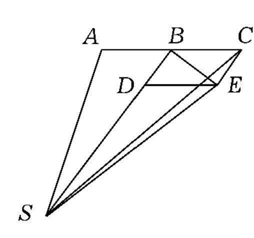


Рис. 125

И действительно, упомянутый закон поверхностей простейшим образом объясняется допущением направленного всегда к Солнцу ускорения планеты. Если радиус-вектор в элемент времени проходит поверхность ABS, то, не будь этого ускорения, он в ближайший и равновеликий элемент времени прошел бы поверхность BCS, причем $BC = AB$, и лежал бы на продолжении линии AB. Но если центральное ускорение в первый элемент времени вызвало скорость, благодаря которой в то же время проходится путь BD, то в ближайший элемент времени радиус-вектор пройдет не поверхность BCS, а поверхность BES, причем отрезок CE параллелен и равен отрезку BD. Но очевидно, что $BES = BCS = ABS$. Таким образом, закон поверхностей или закон секторов ясно свидетельствует о существовании центрального ускорения.

Раз принято допущение центрального ускорения, то *третий* закон указывает на *род* этого последнего. Так как планеты двигаются по эллипсам, мало отличающимся от кругов, то для простоты мы примем, что пути их суть действительные круги. Если R_1, R_2, R_3 обозначают радиусы, а T_1, T_2, T_3 — соответствующие времена оборота, то третий закон Кеплера может быть выражен так:

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \frac{R_3^3}{T_3^2} = \ldots = \text{const}.$$

Но центростремительное ускорение в круговом движении выражается, как известно, так: $\varphi = \dfrac{4R\pi^2}{T^2}$. Примем, что для всех планет φ следует

закону $\varphi = \frac{k}{R^2}$, где k есть некая постоянная величина, и мы найдем

$$\frac{k}{R^2} = \frac{4R\pi^2}{T^2} \quad \text{или} \quad \frac{R^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2} \quad \text{или}$$

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \frac{R_3^3}{T_3^2} = \ldots = \frac{k}{4\pi^2} = \text{const.}$$

Раз принято допущение центрального ускорения, обратно пропорционального квадрату расстояния, то доказательство, что это допущение объясняет также движение по коническим сечениям и специально по эллипсам, представляет дело только чисто *математическое.*

3. Кроме этой *работы ума*, вполне подготовленной работами Кеплера, Галилея и Гюйгенса, нам остается еще достойно оценить работу фантазии Ньютона. Последнюю не следует недооценивать, и мы, не задумываясь, признаем именно ее наиболее важной. Какова природа того ускорения, которое обусловливает криволинейное движение планет вокруг Солнца и спутников вокруг планет?

С великой смелостью мысли Ньютон признал — и сперва именно на примере Луны, — что это ускорение не отличается существенно от известного нам ускорения тяжести. К этому открытию его привел, вероятно, упомянутый уже выше принцип непрерывности, приведший и Галилея к великим его открытиям. Он привык — и эта привычка характерна, по-видимому, для каждого истинно великого исследователя — раз принятое представление по мере возможности сохранить и для случаев с видоизмененными условиями, сохранять в представлениях то же однообразие, которое мы констатируем в процессах природы. То, что *раз* и где-либо оказывается свойством природы, оказывается таковым, если оно и не везде одинаково быстро бросается в глаза, *всегда и везде.* Раз явление тяжести наблюдается не только на поверхности Земли, но и на высоких горах и в глубоких шахтах, то естествоиспытатель, привыкший к непрерывности идей, представляет себе это явление и на больших высотах и глубинах, чем те, которые нам доступны. Возникает вопрос: где же пределы действию тяжести? Не захватывают ли они и Луну? Раз поставлен этот вопрос, огромный полет фантазии есть дело свершившееся, и великое научное открытие ввиду силы разума Ньютона представляет собой лишь необходимое следствие.

В своей книге «Newton und seine physikalischen Principien» («Ньютон и его физические принципы») Розенбергер вполне прав, когда доказывает, что идея всеобщего тяготения не *впервые* появляется у Ньютона,

а что Ньютон имел многих и высоко заслуженных предшественников. Но можно сказать, что у всех этих предшественников дело сводится к предчувствиям, зачаткам и неполным обсуждениям вопроса, и что до Ньютона никто не высказал этой мысли в столь многообъемлющей и энергичной форме, так что рядом с решением великой *математической* проблемы, которого не отрицает и Розенбергер, следует принять еще во внимание необычайную работу научной фантазии.

Из предшественников Ньютона мы назовем прежде всего Коперника, который в 1543 году говорит: «Я, по крайней мере, того взгляда, что тяжесть есть не что иное, как естественное, внушенное божественным провидением Зиждителя мира частям его, стремление, благодаря которому они, смыкаясь в форму шара, образуют одно единое целое. И следует допустить, что это стремление присуще также Солнцу, Луне и остальным планетам...» Подобным же образом Кеплер в 1609 г. рассматривает тяжесть, как уже Жильбер в 1600 году, как нечто подобное магнитному притяжению. На основании этой аналогии, по-видимому, Гук приходит к мысли об *уменьшении* силы тяжести с расстоянием и думает даже о действии обратно пропорциональном квадрату расстояния, представляя себе, что действие тяжести передается посредством *лучей.* Он пытается даже в 1666 году, но, конечно, безрезультатно, определить уменьшение этого действия взвешиванием на высоте Вест-Минстерского Аббатства высоко и низко повешенных тел (как это в наше время пытался сделать Жолли) с помощью часов с маятником и пружинных весов. Конический маятник служит ему превосходным средством для наглядного представления движения планет. Так Гук, действительно, всего ближе подошел к воззрению Ньютона, не достигнув однако вполне всей высоты его.

В двух поучительных сочинениях «Keplers Lehre von der Gravitation» («Учение Кеплера о тяготении») и «Die Gravitation bei Galilei und Borelli» («Тяготение у Галилея и Борелли») Гольдбекк ставит себе задачу проследить историю подготовления теории тяготения с одной стороны у Кеплера и с другой стороны у Галилея и Борелли. Несмотря на свою склонность к аристотелико-схоластическим идеям, Кеплер сумел понять систему планет, как проблему физическую. Луну, по его мнению, Земля *тащит за собой* и, с другой стороны, Луна *притягивает* к себе волну прилива, как Земля *притягивает* тяжелые тела. И для планет источник движения усматривается в Солнце, от которого отходят бестелесные рычаги, увлекающие, вращаясь вместе с ним, более отдаленные

планеты медленнее, чем более близкие. Исходя из этого воззрения, Кеплеру удается даже угадать, что время одного оборота Солнца составляет меньше 88 дней (время оборота Меркурия). Иногда Солнце рассматривается им так же, как вращаемый магнит, которому противостоят магнитные планеты. В мировоззрении Галилея преобладала точка зрения формально-математически-эстетическая. Он отвергает всякое допущение какого-нибудь притяжения и осмеивает это допущение у Кеплера, как допущение детское. Система планет не представляет еще для него настоящей физической проблемы. При всем том он вместе с Жильбером принимает, что чисто геометрическая точка не производит никакого действия, и делает очень многое для доказательства земной природы мировых тел. В своем исследовании о спутниках Юпитера Борелли представляет себе планеты плавающими между слоями эфира неравной плотности. Они имеют *естественную* склонность приближаться к центральному телу (выражение «притяжения» избегается), каковая склонность уравновешивается метательной силой вращения. Это воззрение Борелли иллюстрирует экспериментом, очень похожим на эксперимент, описанный нами на стр. 136, рис. 106. Ясно, что здесь он весьма приближается к Ньютону, но его воззрение есть лишь сочетание воззрений Декарта и Ньютона.

Луна была первой планетой, в отношении которой Ньютон открыл, что то самое ускорение, которому подчинено движение падающего камня, мешает этому мировому телу удалиться в прямолинейном движении от Земли, между тем как тангенциальная его скорость, наоборот, мешает ему упасть на Землю. Движение Луны оказалось, таким образом, сразу в совершенно новом свете и все же с точек зрения вполне известных. Новое воззрение было *заманчивым*, так как оно охватывало объекты, до тех пор совершенно далекие друг от друга, и вместе с тем *убедительным*, так как оно содержало элементы самые известные. Этим объясняется быстрое применение его и к другим областям, как и его победа над другими воззрениями.

С новым воззрением Ньютона не только была разрешена тысячелетняя загадка системы планет, но и стали понятны и другие процессы. Как ускорение тяжести Земли достигает до Луны и повсюду, так достигают повсюду, не исключая и Земли, и ускорения, исходящие из других мировых тел, и этим ускорениям мы на основании принципа непрерывности должны приписывать одни и те же свойства. Но раз тяжесть не есть нечто местное, индивидуально принадлежащее одной Земле, то она

не может иметь своим седалищем *один центр Земли.* Всякая, хотя бы самая малая часть Земли, принимает в этом участие. Каждая часть действует ускоряющим образом на каждую другую часть. Этим были достигнуты такое богатство и такая свобода физического воззрения, о которых до Ньютона и не подозревали.

Целый ряд теорем о действии шаров на другие тела вне шаров, на них или внутри их, исследования формы Земли и, в особенности, ее сплющенной формы, вызванной вращением, — все это как бы само собой вытекало из этого воззрения. Загадка явлений прилива и отлива, связь которых с Луной давно уже подозревалась и до него, сразу нашла свое объяснение в ускорении более подвижных водных масс по направлению к Луне.

Ньютон объясняет себе тождество земной тяжести с общим тяготением, обусловливающим движение небесных тел, представляя себе движение камня, брошенного с вершины высокой горы, с последовательно возрастающей горизонтальной скоростью. Парабола движения, если не принять во внимание сопротивления воздуха, становится все более и более растянутой пока она, наконец, совсем не минует Землю, и камень переходит на другую планету, спутник Земли. Он исходит из *факта* общей тяжести. Объяснение этого явления, говорит он, ему не удалось, а придумыванием гипотез он не занимается. Тем не менее он не может на этом успокоиться, как это видно из его известного письма к Бентлею. Допустить, что тяготение есть сущность материи и прирожденна ей так, что одно тело может действовать на другое без всякого посредства через пустое пространство, кажется ему *абсурдом.* Но материален ли, или не материален (духовен) этот посредствующий агент, он решать не желает. Таким образом, Ньютон, подобно прежним и последующим исследователям, чувствует потребность в объяснении тяжести, в объяснении ее, например, действием прикосновения. Но огромный успех, которого добился Ньютон в астрономии силами, действующими на расстоянии, в качестве основы дедукции, скоро внес очень большие изменения в положение дела. Привыкли к силам, действующим на расстоянии, как к данному исходному пункту объяснения, и потребность в постановке вопроса об их происхождении исчезла почти совсем. Была произведена попытка ввести эти силы и во все остальные области физики, представляя себе тела состоящими из действующих на расстоянии частичек, разъединенных пустыми промежутками. В конце концов этим действием на расстоянии частичек было объяснено

даже сопротивление тел против давления и удара, т. е. именно действие прикосновения. И действительно, последнее действие вследствие своей прерывности выражается через более сложную функцию, чем первое. В наибольшем почете силы, действующие на расстоянии, были у *Лапласа* и у его современников. Наивно гениальные воззрения Фарадея и математическая формулировка их Максвеллом снова выдвинули на передний план силы, действующие при прикосновении. Различные затруднения вызвали уже у астрономов сомнения в точности законов Ньютона и делались попытки к небольшим количественным изменениям их. Но после того как было найдено доказательство распространения во времени действия электрического, естественно снова возник вопрос о подобных же соотношениях в случае аналогичных действий тяжести. В действительности последняя имеет большое сходство с электрическими силами, действующими на расстоянии; разница только та, что у первой существует, насколько это до сих пор известно, только притяжение и совсем нет отталкивания. Феппль (Föppl, Ueber eine Erweiterung des Gravitationsgesetzes Sitzungsb. d. Münch. Akademie, 1897, стр. 6 и след.) полагает, что можно, не впадая в противоречие с фактами действительности, принять и в отношении тяготения отрицательные массы, взаимно также притягивающиеся, но отталкивающиеся от масс положительных, а следовательно, можно допустить и *конечные* поля тяготения, подобные электрическим. В своем реферате о действиях на расстоянии, прочитанном в собрании естествоиспытателей в 1897 году, Друде перечисляет много попыток доказать скорость распространения тяготения, доходящих до Лапласа. Результат можно считать отрицательным, ибо возможные скорости распространения не согласуются между собой, но все в очень много раз больше скорости распространения света. Только Пауль Гербер (Paul Gerber, Ueber die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Gravitation, Zeitschr. f. Math. und Phys., 1898, II) находит из движения перигелия Меркурия (41 секунда в течение столетия) скорость распространения тяготения равной скорости распространения света. Будь это определение верно, оно говорило бы в пользу эфира, как среды тяжести. См. W. Wien, Ueber die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik. (Archives Neerlandaises, La Haye, 1900, V, стр. 96.)

4. Обратное влияние вновь приобретенных физических познаний на механику не могло не проложить себе путь. Весьма различное ускорение, присущее, согласно новому воззрению, *одному и тому же телу*

в зависимости от его положения в мировом пространстве, сейчас же навело на мысль о *переменном* весе, причем все же *один* признак тела был признан постоянным. Этим были сначала ясно разделены понятия *массы* и *веса*. Установленная изменчивость ускорения побудила Ньютона посредством особых опытов констатировать независимость ускорения тяжести от химического состава тела, чем были получены новые точки опоры для выяснения отношения между массой и весом, что мы ниже покажем подробнее. Наконец, работы Ньютона сильнее, чем когда-либо раньше, дали почувствовать *общую применимость понятия силы* Галилея. Невозможно было более думать, что это понятие применимо только к явлению падения тел и ближайшим к нему процессам. Обобщение здесь совершилось как бы само собою, не возбудив особого шума.

5. Рассмотрим теперь подробнее работы Ньютона в отношении *принципов механики*. Мы при этом сначала совершенно отдадимся во власть воззрений Ньютона, попытаемся дать их почувствовать читателю, ограничившись только совсем подготовительными критическими замечаниями, а подробную критику оставим для другого места. Когда мы перелистываем его сочинение «Philos. natural. princip. mathemat.», Londini, 1687, нам сейчас же бросаются в глаза следующие основные пункты, представляющие шаг вперед сравнительно с воззрениями Галилея и Гюйгенса:

1) Обобщение понятия силы.
2) Установление понятия массы.
3) Ясная и общая формулировка правила параллелограмма сил.
4) Установление принципа равенства действия и противодействия.

6. Относительно первого пункта нам остается мало прибавить к сказанному уже. Ньютон рассматривает все *определяющие движение* условия, не только тяжесть, но и притяжение планет, действие магнитов и т. д., как условия, *определяющие ускорение*. При этом он вполне ясно замечает, что словами «притяжение» и т. д. он хочет обозначить не представление о причине или роде взаимодействия, а только то, что выражается в действительных процессах движения. Многократные определенные заверения Ньютона, что ему важны не умозрения о скрытых причинах явлений, а исследование и констатирование того, что дано в *фактах*, его ход идей, ясно и коротко выражающийся в его словах «hypotheses non fingo» («я гипотез не строю»), характеризуют его, как *философа выдающегося* значения. Он вовсе не желает привести се-

бя в изумление собственными своими выдумками, поражать себя или импонировать себе, он хочет познать *природу*[1].

7. Относительно понятия массы мы прежде всего заметим, что формулировка его, данная Ньютоном, а именно, что масса есть *количество материи тела*, определяющееся произведением его объема на плотность, неудачна: плотность мы можем же определять только как массу единицы объема, и образующийся здесь порочный круг очевиден. Ньютон ясно чувствовал, что каждому телу присущ количественный признак, определяющий движение и отличный от его веса. Этот признак мы вместе с ним называем массой. Но ему не удалось этому факту познания дать вполне точное выражение. Мы еще вернемся к этому пункту в другом месте, но здесь заметим еще покуда следующее.

8. Множество данных опыта, достаточное количество которых находилось в распоряжении Ньютона, ясно свидетельствует о существовании *определяющего движение признака*, отличного от веса тела. Если привязать веревку к маховому колесу, перебросить ее через блок и по-

[1]Это превосходно обнаруживается в правилах для исследования природы, которые создал себе Ньютон:

1. *Правило.* Не следует допускать больше причин для объяснения естественных вещей, чем сколько их есть в действительности и для объяснения этих явлений достаточно.

2. *Правило.* Поэтому необходимо, насколько возможно, однородным действиям приписывать и однородные причины. Так следует приписывать одни причины дыханию человека и животных, падению камня в Европе и Америке, свету огня в печке и свету Солнца, отражению света на Земле и на планетах.

3. *Правило.* Те свойства тел, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые присущи всем телам, известным нам из опыта, необходимо признать свойствами всех тел. (Далее следует перечисление общих свойств тел, перешедшее во все учебники).

«Если, наконец, все тела подвержены силе тяжести близ Земли и именно пропорционально количеству содержащейся в них материи; если Луна притягивается к Земле пропорционально своей массе и наоборот наше море притягивается Луной; если далее специальными опытами и астрономическими наблюдениями установлено, что все планеты взаимно притягиваются, а кометы притягиваются Солнцем; то на основании этого правила следует утверждать, что все тела взаимно притягиваются.»

4. *Правило.* В экспериментальной физике необходимо положения, выведенные индуктивным путем из явлений, считать или вполне истинными, или очень близкими к истинным, несмотря на гипотезы, утверждающие противное, и считать их таковыми до тех пор, покуда не явятся другие явления, которые или придадут им большую точность, или подчинят их известным исключениям.

Это необходимо для того, чтобы аргумент индукции не был уничтожен гипотезами.

тянуть колесо вверх, мы почувствуем *вес* махового колеса. Но если поместить это колесо на возможно более цилиндрическую и гладкую ось и возможно лучше сбалансировать его, оно не будет уже, благодаря своему весу, занимать определенного положения. При всем том мы чувствуем огромное сопротивление, как только попытаемся привести колесо в движение или движущееся колесо остановить. Перед нами явление, которое дало повод для провозглашения особого свойства инерции или даже силы инерции, что, как мы уже видели и как мы покажем еще ниже, не нужно. Два равных груза, одновременно поднятых вверх, оказывают сопротивление поднятию своим весом. Если же к ним привязать за оба конца веревку и эту последнюю перебросить через блок, то они будут сопротивляться движению или скорее *изменению* скорости блока своей *массой*. Большой груз, подвешенный на очень длинной нити в качестве маятника, может быть без труда удержан небольшим отклонением нити рядом с положением равновесия. Составляющая этого веса, которая гонит маятник в положение равновесия, очень мала. Тем не менее мы чувствуем значительное сопротивление, когда мы быстро двигаем груз или хотим задержать его движение. Груз, который едва носится воздушным шаром, оказывает всякому движению ощутимое сопротивление, несмотря на то, что вес его не должен уже быть преодолеваем. Если принять еще в соображение, что одно и то же тело на различных географических широтах и в различных местах мирового пространства получает весьма различные ускорения тяжести, мы должны будем признать массу признаком, определяющим движение и отличным от веса тела.

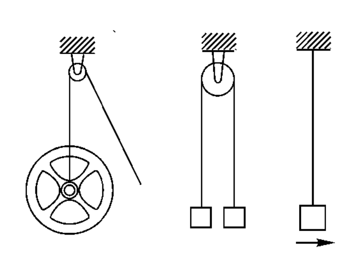


Рис. 126

Укажем еще здесь только на то, что для Ньютона, с его своеобразным ходом развития, взгляд на массу, как на *количество материи*, *психологически* был весьма близок. Прежде всего невозможно ожидать от естествоиспытателя эпохи Ньютона критических исследований относительно происхождения понятия материи. Понятие это развилось совершенно инстинктивно, находится как нечто данное и воспринимается с полной наивностью. То же самое происходит с понятием силы. Но сила представляется связанной с материей. Так как именно Ньютон приписывает всем материальным частям однородные силы тяготения,

рассматривая силы мировых тел, с которыми они действуют друг на друга, как суммы сил отдельных частей их, из которых они складываются, то эти силы представляются ему именно связанными с количеством материи. На последнее обстоятельство указал Розенбергер («Newton und seine physikalischen Principien», Leipzig, 1895, в особенности стр. 192).

В другом месте (в моей книге «Die Analyse der Empfindungen»[1]) я попытался показать, как постоянство *связей* различных чувственных ощущений приводит нас к допущению *абсолютного* постоянства, которое мы называем *субстанцией*. Первым и ближайшим примером такой субстанции является подвижное *тело*, которое мы можем отличить от окружающей его среды. Если тело может делиться на однородные части, из которых каждая представляет постоянный комплекс свойств, то мы приходим к представлению субстанции, *количественно* изменяемой, которую мы и называем *материей*. Но то, что мы отнимаем от какого-нибудь тела, появляется зато в другом месте. Все количество материи оказывается *постоянным*. Но если быть точным, мы имеем столько же субстанциального количества, сколько тела имеют свойств, и для *материи* не остается никакой другой функции, кроме выражения постоянной связи отдельных свойств, среди которых *масса* есть только *одно* из них. (См. «Principien der Wärmelehre», 1896, стр. 425).

9. Важно доказательство Ньютона, что при известных специальных условиях масса какого-нибудь тела может измеряться его весом. Представим себе тело, покоящееся на подставке, на которую оно давит своим весом. Само собою напрашивается замечание, что 2–3 таких тела или половина, треть их оказывали бы и давление в 2–3 раза большее или в 2–3 раза меньшее. Представляя ускорение падающего тела большим, меньшим или равным нулю, мы будем ожидать, что и давление будет больше, меньше или исчезнет. Мы *видим*, следовательно, что давление, производимое весом тела, возрастает, убывает и исчезает вместе с «количеством материи» и величиной ускорения падающего тела. Мы даем простейшее выражение давлению p, представляя его количественно, как произведение из количества материи m и ускорения падающего тела g, т. е. $p = mg$. Если мы возьмем два тела, давления которых соответственно равны p, p', которым мы приписываем «количества мате-

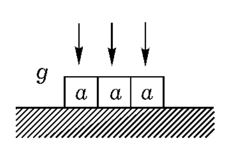


Рис. 127

[1]«Анализ ощущений». (Есть русский перевод изд. С. А. Скирмунта. — *Прим. пер.*)

рии» m, m' и ускорения падения g, g', то мы имеем $p = mg$ и $p' = m'g'$. Если бы нам удалось доказать, что независимо от материальных (химических) свойств в том же месте Земли $g = g'$, мы имели бы $\frac{m}{m'} = \frac{p}{p'}$, т. е. *масса* в том же месте Земли могла бы *измеряться весом* тела.

Независимость g от химических свойств тел Ньютон доказал при помощи маятников равной длины, но *различного* материала, которые все обнаруживали *равную* продолжительность колебания. При этом он подробно изучил и принял в соображение погрешности, являющиеся следствием сопротивления воздуха. Чтобы устранить это явление, можно изготовить шарики маятников равной величины, но из различного материала и сделать вес их равным, создавая в них пустоты различной величины. Вес тела можно тогда рассматривать, как обладающее одним и тем же ускорением g, и количество материи или масса их может, по Ньютону, измеряться их весом.

Представим себе ряд тел и магнит, разделенные стенкой. При достаточной силе магнита эти тела, по крайней мере, большинство из них, будут оказывать давление на стену. Но никому не придет в голову воспользоваться этим магнитным давлением таким же образом, как давлением веса, в качестве меры массы. Неравенство ускорений, вызванных в различных телах магнитом, слишком очевидно, чтобы такая мысль вообще могла даже явиться. Впрочем, читатель заметит, что все это рассуждение имеет еще одну рискованную сторону: оно *предполагает* уже понятие массы, которое мы до сих пор только *называли* и ощущали, как *потребность*, но которое еще не *определено*.

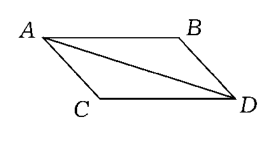


Рис. 128

10. Ньютону мы обязаны ясной формулировкой принципа сложения сил[1]. Если на тело одновременно действуют две силы, из которых одна вызвала бы движение AB, а другая — движение AC в то же время, то, так как обе силы и вызываемые ими движения *друг от друга не зависят*, тело будет двигаться в то же время по AD. Это воззрение вполне естественно и при всем том ясно обозначает существенный пункт. В нем нет ничего из того искусственного и надуманного, что было внесено впоследствии в учение о сложении сил.

Чтобы приблизить правило к современной его форме, мы можем

[1]Здесь следует еще упомянуть о работах Роберваля (1668) и Лами (1687) в области учения о сложении сил. О работах Вариньона мы уже упоминали.

дать ему несколько иное выражение. Ускорения, которые сообщают одному и тому же телу различные силы, суть вместе с тем мерило этих сил. Но ускорениям пропорциональны также пройденные в равные времена расстояния; следовательно, последние сами могут быть мерилом сил. Мы можем поэтому сказать так: если на тело A действуют по направлениям AB и AC две силы, пропорциональные линиям AB и AC, то наступает движение, которое также может быть вызвано третьей силой, направленной по диагонали параллелограмма, построенного на линиях AB и AC, и ей пропорциональной. Последняя сила, следовательно, может заменить обе другие. Если φ и ψ суть оба ускорения по линиям AB и AC, то для известного времени t имеем: $AB = \frac{\varphi t^2}{2}$, $AC = \frac{\psi t^2}{2}$. Если представим себе, что движение по AD вызвано в то же время *одной* силой (с ускорением χ), то мы имеем

$$AD = \frac{\chi t^2}{2} \quad \text{и} \quad AB : AC : AD = \varphi : \psi : \chi.$$

Раз установлена независимость тел друг от друга, то принцип параллелограмма сил может быть легко получен из понятия силы Галилея. Философски вывести этот принцип без допущения независимости было бы тщетной попыткой.

11. Самым важным, может быть, делом Ньютона в области принципов механики была ясная и общая формулировка *принципа равенства действия и противодействия*, давления и обратного давления. Вопросы о движении тел, взаимно влияющих друг на друга, не могут быть решены при помощи одних принципов Галилея. Нужен новый принцип, который именно определял бы взаимодействие тел. Таковым принципом является принцип Гюйгенса для исследования центра колебания, и таковым также принцип Ньютона о равенстве действия и противодействия.

Тело, действующее давлением или притяжением на другое тело, испытывает, по Ньютону, от этого другого тела такое же давление или притяжение. Давление и обратное давление, сила и обратная сила всегда друг другу равны. Так, Ньютон определяет, меру силы, как произведенное в единицу времени количество движения (масса×скорость), то отсюда следует, что действующие друг на друга тела в равные времена сообщают друг другу равные и противоположные количества движения или получают противоположные и обратно пропорциональные своим массам скорости.

Хотя принцип Ньютона представляется в своем выражении гораздо проще, ближе и на первый взгляд более приемлемым, чем принцип Гюйгенса, все же не трудно заметить, что в нем вовсе не меньше неанализированного опыта, не меньше инстинктивного. Нет никакого сомнения, что первый толчок к становлению этого принципа был чисто инстинктивного характера. Известно, лишь после того, как стараешься привести какое-нибудь тело в движение, испытываешь от этого тела сопротивление. Чем быстрее мы стараемся отбросить большой камень, тем больше собственное наше тело отбрасывается назад. Давление и обратное давление параллельны. Допущение равенства давления и обратного давления само собой напрашивается, когда мы представляем себе (согласно собственным объяснениям Ньютона) между двумя телами натянутую веревку или натянутую или придавленную спиральную пружину.

Инстинктивных, принадлежащих статистике показаний касательно равенства давления и обратного давления существует очень много. Сюда относится тот тривиальный факт опыта, что никто не может сам поднять себя на воздух, потянув вверх свой стул. В одной схолии, в которой он сам приводит в качестве предшественников в пользовании этим принципом физиков Врена, Гюйгенса и Валлиса, Ньютон приводит также аналогичные соображения. Он представляет себе Землю, отдельные части которой притягивают друг друга, разделенные какой-нибудь плоскостью. Если бы давление одной части на другую не было бы равно обратному давлению, Земля должна была бы двигаться в направлении большего давления. Но, как мы знаем из опыта, движение одного тела может быть определено только другими телами, находящимися вне его. К тому же можно представить себе названную плоскость деления в каком угодно положении, вследствие чего и направление движения было бы совершенно неопределенным.

12. Неясность понятия массы снова становится заметной, как только мы хотим дать динамическое применение принципу равенства действия и противодействия. Пусть давление и обратное давление равны. Но откуда же мы знаем, что равные давления сообщают массам обратно пропорциональные скорости? И действительно, Ньютон чувствует потребность подтвердить этот закон на опыте. Он приводит в своей схолии в подтверждение его опыты с ударами тел Врена и сам производит эксперименты. В склянку, закрытую пробкой, он помещает магнит, а в другую — кусочек железа, помещает обе склянки в воду

и предоставляет им действовать друг на друга. Склянки приближаются друг к другу, сталкиваются, остаются друг близ друга в покое. Этот опыт говорит в пользу равенства давления и обратного давления, как и в пользу равенства и противоположности направления количеств движения (как мы в этом убедимся при обсуждении законов удара тел).



Портрет Ньютона

13. Читатель уже почувствовал, что различные утверждения Ньютона относительно массы и принципа обратного действия находятся во взаимной *связи* друг с другом, что одно опирается на другое. В основе их лежат следующие данные опыта: инстинктивное познание связи

давления и обратного давления, познание, что тела сопротивляются изменению скорости независимо от своего веса, но в соответствии с ним, наблюдение, что тела большего веса при равном давлении получают меньшие скорости. Ньютон превосходно чувствовал, *какие* основные понятия и основные принципы механики необходимы. Но *форма* его положений, как мы это подробнее покажем еще ниже, заставляет еще кое-чего желать. Мы не имеем права слишком низко оценивать на этом основании то, что он сделал, ибо ему пришлось преодолеть величайшие затруднения и он меньше, чем все другие научные исследователи, избегал их.

14. То, что сделал Ньютон, далеко не ограничивается той областью, которая составляет содержание настоящей книги. Уже его «принципы философии природы» выходят далеко за пределы видения собственно механики. Здесь же обсуждается движение в соприкасающихся средах, движение жидкостей также и под влиянием трения, здесь же впервые подвергается теоретическому обсуждению скорость распространения звука. Но ряд важнейших открытий мы находим в сочинениях Ньютона по оптике. Здесь излагается разложение света в призме, сложение белого цвета из различных цветных его составных частей неравной преломляемости, куда присоединяется доказательство периодичности света и определение длины периода, зависящей от цвета и показателя преломления. И существенные стороны поляризации были впервые поняты Ньютоном. Другие исследования привели его к установлению закона охлаждения тел и основанного на нем термометрического или пирометрического принципа. В своих сочинениях по оптике Ньютон с полной откровенностью изложил и пути, которые привели его к его открытиям. Неприятные споры, в которые вовлекли его эти первые сочинения, оказали, по-видимому, влияние на изложение его принципов. Здесь он уже в синтетической форме излагает доказательства найденных им теорем, не вскрывая методов, которые привели его к ним. Ожесточенный спор между Ньютоном и Лейбницем и их сторонниками по вопросу о приоритете в изобретении учения о бесконечно малых величинах, были существенным образом обусловлены позднейшим обнародованием метода истечения Ньютона. В настоящее время ясно видно, что оба исследователя опирались на своих предшественников, не заимствуя ничего друг у друга, что изобретение было достаточно подготовлено для того, чтобы оно могло появиться в различной форме. Подготовительные работы Кеплера, Галилея, Декарта, Ферма, Роберва-

ля, Кавалери, Гульдина, Валлиса, Баррова были обоим доступны.

4. Обсуждение и наглядное доказательство принципа противодействия

1. Обратимся теперь к мыслям Ньютона и попытаемся больше приблизить к нашему чувству и нашему воззрению принцип противодействия. Если друг на друга действуют две массы M и m, то они, по Ньютону, сообщают друг другу *противоположным образом направленные* скорости V и v, отношение между которыми обратно пропорционально отношению их масс, т. е.

$$MV + mv = 0.$$

Рис. 129

Рис. 130

Можно придать этому основному принципу внешний характер большой очевидности следующим рассуждением. Мы представляем себе сначала два совершенно (и в химическом отношении) *равных* тела a. Противопоставим их друг другу и пусть они действуют друг на друга. Если исключить влияние третьего тела и наблюдателя, то сообщение ими друг другу *равных*, но противоположным образом направленных скоростей в направлении линии, соединяющей эти тела, есть единственное *однозначно* определенное их взаимодействие.

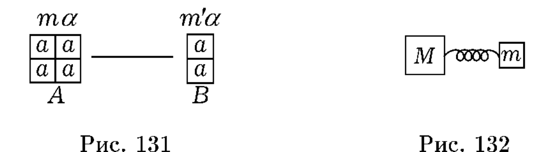


Рис. 131

Рис. 132

Представим себе теперь тело A, состоящее из m таких тел a (рис. 131), и противопоставим ему тело B, состоящее из m' таких тел a. Мы имеем тогда тела, количества материи или массы которых относятся, как $m : m'$. Расстояние между обеими группами тел мы принимаем столь великим, что мы можем пренебречь протяжением тел. Будем

рассматривать теперь ускорения α, которые сообщают друг другу два тела a, как ускорения друг от друга независимые. Каждой части в A тело B сообщает ускорение $m'\alpha$, а каждой части в B тело A сообщает ускорение $m\alpha$, и эти ускорения будут обратно пропорциональны массам.

2. Теперь представим себе, что масса M связана с массой m (причем обе они состоят только из равных тел a) упругой связью (рис. 132). Пусть масса m получает от *внешней* причины ускорение φ. Тотчас же наступает перемещение в нашей связи, которое приводит с одной стороны к замедлению m, но зато с другой стороны к ускорению M. Как только обе массы двигаются с равным ускорением, *дальнейшему* перемещению связи конец. Если α есть ускорение M, а β — ослабление ускорения m, то мы имеем $\alpha = \varphi - \beta$, причем по предыдущему $\alpha M = \beta m$. Отсюда следует

$$\alpha + \beta = \alpha + \frac{\alpha M}{m} = \varphi \quad \text{или} \quad \alpha = \frac{m\varphi}{M + m}.$$

Если бы мы захотели еще больше войти в подробности процесса, мы должны были бы признать, что рядом с поступательным движением обе массы большей частью выполняют еще движение колебательное. Если в этой связи развивается большое напряжение при малейшем перемещении их, то амплитуды этих колебаний не могут стать очень велики, так что можно совершенно пренебречь этим колебательным движением, как мы это сделали.

Рассмотрим выражение $\alpha = \dfrac{m\varphi}{M + m}$, определяющее ускорение всей системы. Мы видим, что произведение $m\varphi$ играет в этом определении особую роль. Ньютон назвал поэтому это произведение из массы на сообщенное ей ускорение именем «*движущая сила*». Сумма же $M + m$ изображает всю массу неподвижной системы. Таким образом, мы получаем ускорение массы m', на которую действует движущая сила p, в выражении $\dfrac{p}{m'}$.

m_3 m_2 m_1

□ □ □

Рис. 133

3. Чтобы получить этот результат, вовсе не необходимо, чтобы обе связанные друг с другом массы прямо действовали друг на друга во всех частях. Представим себе три связанные друг с другом массы m_1, m_2, m_3 и допустим, что m_1 действует только на m_2, а m_3 — только на m_2. Пусть масса m_1 получает от внешней причины ускорение φ. В случае перемещения массы получают ускорения

$$\begin{array}{ccc} m_3 & m_2 & m_1 \\ +\delta & +\beta & +\varphi \\ & -\gamma & -\alpha. \end{array}$$

Все ускорения, направленные вправо, считаются здесь положительными и все ускорения, направленные влево, — отрицательными. Очевидно, что перемещение не возрастает более,

$$\text{если} \quad \delta = \beta - \gamma, \quad \delta = \varphi - \alpha,$$
$$\text{причем} \quad \delta m_3 = \gamma m_2, \quad \alpha m_1 = \beta m_2.$$

Решение этих уравнений дает общее ускорение

$$\delta = \frac{m_1 \varphi}{m_1 + m_2 + m_3},$$

т. е. результат той же формы, что и раньше. Таким образом, если магнит действует на кусок железа, связанный с куском дерева, мы не должны задумываться над тем, какие части дерева перемещаются движением куска железа непосредственно и какие посредственно (через посредство других частей дерева). Приведенные рассуждения должны были содействовать тому, чтобы почувствовалось великое значение для механики положений Ньютона. Вместе с тем они впоследствии послужат к тому, чтобы легче выяснить недостатки этих положений.

4. Займемся теперь несколькими физическими примерами, наглядно иллюстрирующими принцип противодействия. Пусть некоторый груз L лежит на столе T. Стол испытывает давление от груза лишь *постольку*, поскольку он обратно давит на груз и, следовательно, *мешает* этому последнему упасть. Если p обозначает вес, m — массу и g — ускорение тяжести, то, согласно воззрению Ньютона, мы имеем: $p = mg$. Если мы представим себе, что наш стол движется вниз с ускорением свободно падающего тела g, то всякое давление на него прекращается. Отсюда ясно, что давление на стол определяется относительным ускорением груза к столу. Если стол падает с ускорением γ, то давление на него $= m(g - \gamma)$, а если он движется вверх с тем же ускорением, то давление на него равно $m(g + \gamma)$. Но нетрудно заметить, что *постоянной скоростью* движения вверх или вниз

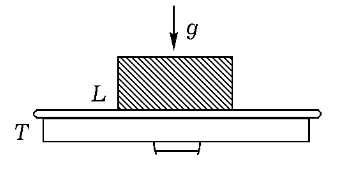


Рис. 134

в существующем здесь соотношении не изменяется ничего. Решающее значение имеет здесь *относительное ускорение.*

Галилею это соотношение было знакомо очень хорошо. Мнение аристотеликов, что тела большего веса быстрее падают, он опроверг не только на опыте, но и логически, загнав своих противников в тупик. Большие тела падают быстрее, говорили аристотелики, потому что верхние части их, давя на нижние, ускоряют их падение. В таком случае, отвечает Галилей, меньшее тело, будучи связано с большим, должно замедлять движение этого последнего, раз оно падает медленнее. Но тогда большее тело падало бы медленнее, чем меньшее. Ложно, говорит Галилей, все основное допущение, ибо *одна* часть *падающего* тела вовсе не может давить своим весом на *другую.*

Возьмем маятник с продолжительностью колебания $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Если ось его получит ускорение γ вниз, то продолжительность колебания $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g-\gamma}}$ и при свободном падении маятник получит бесконечную продолжительность колебания, т. е. перестанет колебаться.

Если мы сами прыгаем или падаем с какой-нибудь высоты, у нас появляется своеобразное чувство, обусловленное, вероятно, прекращением давления веса одних частей тела на другие, давления крови и т. д. Если бы мы вдруг перенеслись на какое-нибудь меньшее мировое тело, мы должны были бы иметь такое чувство, как будто почва уходит из-под ног. На большем мировом теле у нас должно было бы быть чувство непрерывного поднятия, как во время землетрясения.

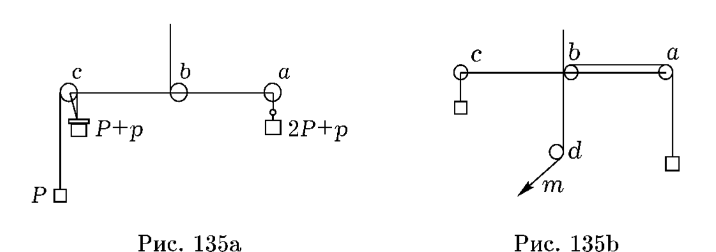


Рис. 135a Рис. 135b

5. Все эти соотношения очень хорошо иллюстрируются при помощи аппарата, построенного Поггендорффом (рис. 135c). Через блок c в конце коромысла переброшена нить с грузами P на обоих концах. Привязывают к одному концу еще груз p и тонкой нитью прикреп-

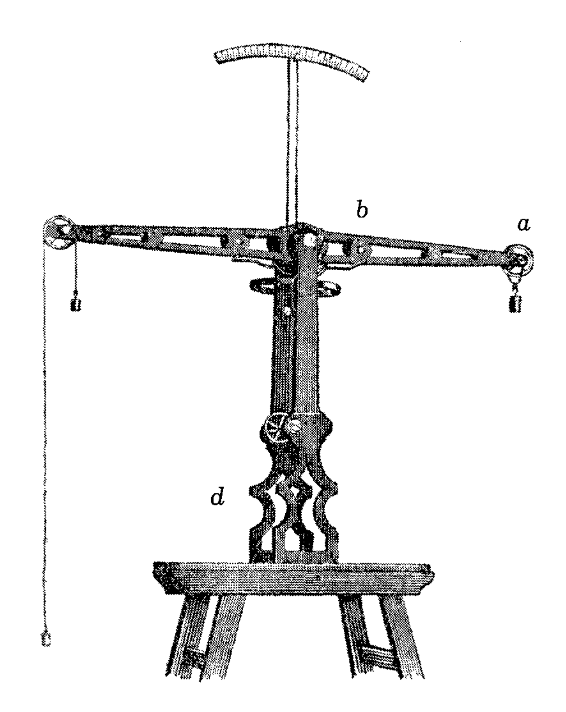


Рис. 135с

ляют его неподвижно к оси блока. На блоке висит тогда груз $2P + p$ (см. рис. 135а). Если поджечь нить прибавочного груза p, то, когда она перегорит, начинается равномерно ускоренное движение с ускорением γ, с которым груз $P + p$ падает вниз, а с другой стороны P поднимается вверх. Обременение блока становится при этом меньше, что можно узнать по стрелке весов. Падающий груз P компенсируется поднимающимся грузом P, прибавочный же груз весит уже не p, а $\frac{P}{g}(g - \gamma)$.

Так как однако $\gamma = \frac{p}{2P + p}g$, то грузом, обременяющим блок, следует считать не p, а $p \cdot \frac{2P}{2P + p}$. Груз, встречающий лишь частичное противодействие в своем движении падения, только частью давит на блок.

Можно и видоизменить опыт. Привязав к одному концу нити

груз P, перебрасывают ее через блоки аппарата a, b, d, как это изображено на рис. 135b, а другой конец прикрепляют неподвижно у m, и приводят весы в равновесие. Если потянуть за нить m, то это не может оказать *непосредственного* действия на весы, ибо направление нити идет прямо через ось весов. Тем не менее сторона a сейчас же опускается вниз. Если отпустить нить, сторона a поднимается. Движение груза без ускорения не могло бы нарушить равновесия. Но переходить от состояния покоя к состоянию движения *без* ускорения невозможно.

6. С первого взгляда странным кажется то явление, что в жидкости тельца большего или меньшего удельного веса, если только они достаточно малы, очень долго остаются на поверхности. Но легко заметить, что таким частицам приходится преодолевать трение жидкости. Если куб, изображенный на рис. 136, разделить намеченными на рисунке тремя разрезами на восемь частей и расположить их рядом, то масса и вес тела не изменяются, а поперечный разрез и поверхность, с которыми связано трение, удваивается.

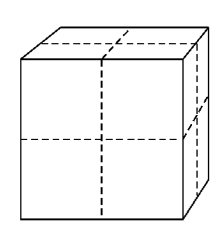


Рис. 136

Был высказан взгляд, что подобного рода плавающие на поверхности жидкости частички не оказывали бы никакого влияния на удельный вес, измеренный погруженным в жидкость ареометром, ибо эти частички сами были бы только ареометрами. Но нетрудно сообразить, что раз эти частички падают или поднимаются с постоянной скоростью, что сейчас же наступает при очень малых частичках, то действие их на весы и на ареометр должно оставаться тем же самым. Если мы представим себе ареометр колеблющимся около своего положения равновесия, то легко заметить, что жидкость будет участвовать в этом движении со всем своим содержанием. Таким образом, если применить принцип возможных перемещений, то нет никакого сомнения, что и ареометр должен показать средний удельный вес. Что неправильно мнение, будто ареометр показывает только удельный вес жидкости, но не плавающих в ней частей, легко убедиться следующим рассуждением. Пусть в жидкости A распределено мелкими каплями небольшое количество более тяжелой жидкости B. Пусть ареометр показывает только вес жидкости A. Если увеличивать постепенно количество жидкости B, пока оно не станет равно количеству жидкости A, то невозможно сказать, какая жидкость в какой плавает и какой, следовательно, удельный вес должен показывать ареометр.

7. Великолепное явление, в котором взаимное давление тел оказывается в зависимости от относительного их ускорения, есть явление прилива. Мы рассмотрим здесь это явление лишь постольку, поскольку оно может служить для выяснения затронутого нами пункта. Связь, существующая между этим явлением и движением Луны, выражается в совпадении периодов прилива с периодами Луны, в усилении приливов во время полно- и новолуния, в ежедневном запаздывании прилива (на 50 минут) соответственно запаздыванию кульминации Луны и т. д. И действительно, о связи между этими двумя процессами думали уже очень давно. В эпоху Ньютона представляли себе известного рода волну воздушного давления, через посредство которой Луна при своем движении вызывает явление прилива.

Явление прилива производит огромное впечатление на каждого, кому приходится впервые его наблюдать во всем его объеме. Нет поэтому ничего удивительного в том, что оно во все времена живо интересовало исследователей. Воины Александра Великого, зная только тень этого явления по Средиземному морю, были немало поражены, когда им впервые пришлось наблюдать огромный прилив в устье реки Инда. Приведем здесь дословно описание об этом у *Курциуса Руфа* («Von den Thaten Alexander's des Grossen», Lib. IX, Cap. 34–37).

«34. Преодолевая противоположное течение морского прилива, они медленно подвигались дальше и, достигши острова посреди моря, они бросили якорь и рассеялись по острову в поисках провианта, не подозревая о том событии, которое ожидало их, несведущих.

35. Был третий час, когда океан своими постоянными сменами прилива и отлива стал надвигаться и заливать реку. Образовалась запруда, но дальнейший напор океана еще больше погнал реку назад и она с огромной силой потекла в противоположном направлении, падая, подобно водопаду, по покатому руслу. Толпе была незнакома природа моря, и она увидела в этом чудо и знамение гнева Божьего. Вода все с большей и большей силой стала заливать поля, бывшие только что свободными от воды. Вот корабли появились на хребтах волн и весь флот рассеялся в разные стороны. В это время со всех сторон стали стекаться к берегу испуганные люди, пришедшие в ужас от неожиданного несчастья. Но в сумятице и поспешность не помогает. Одни стали веслами толкать корабли к берегу, другие же хотели ехать и мешали установке руля. Некоторые, спеша отъехать от берега, не дождались своих товарищей и теперь с трудом приводили в движение неуклюжие и трудноуправля-

емые корабли. На другие корабли в отчаянии бросилось слишком много людей, и в то время, как на одних кораблях было слишком мало людей, другие были слишком переполнены. Крики оставленных, просивших подождать, и крики на кораблях, требующие, чтобы отчаливали, — все смешалось в одно, лишая всех возможности видеть и слышать что-нибудь. Даже от рулевых не было ни малейшей помощи, так как ни крики их не доходили до ушей безумствующих, ни приказания их не исполнялись испуганными и смущенными. Корабли стали поэтому наталкиваться друг на друга, ломать друг у друга весла и один корабль наскакивал на другой. Можно было бы подумать, что это не флот одного и того же войска, а два различных флота, столкнувшиеся в морском сражении. Передние части одних кораблей ударялись о задние части других, те, которые только что внесли сумятицу в одни ряды, сейчас же видели себя вытесненными последующими за ними, и гнев спорящих скоро вылился в рукопашную схватку

36. Но вот прилив залил все поля, так что одни только вершины их выступали, подобно маленьким островкам; к ним в страхе стали спешить очень многие, потеряв надежду добраться вплавь до кораблей. Часть флота находилась там, где вода была глубока, где до прилива были долины, часть сидела на мели там, где волны едва покрыли возвышения. Но вдруг случилось нечто новое и еще более ужасное: море стало отступать, воды длинными рядами волн стали возвращаться к своему месту и снова обнажать только что залитую землю. Корабли, оставленные водой, стали ударяться друг о друга, и некоторые легли набок; поля были покрыты вещами, оружием и обломками оторванных досок и весел. Солдаты не смели ни ступить на берег, ни оставаться на кораблях, все еще дожидаясь дальнейшего и худшего. Они едва верили своим глазам: кораблекрушение на суше, течение на море! Несчастью не видно было конца: не зная того, что новый прилив скоро вернет воды и снимет корабли с мели, они опасались голода и величайшей нужды. Там и сям ползали страшные животные, оставленные волнами.

37. Наступила ночь и сам король был глубоко опечален, отчаявшись в спасении. Но эти заботы не осилили его непобедимой смелости, а он всю ночь оставался на вершине горы и выслал всадников к истоку реки с приказанием, как только они увидят новый прилив моря, поспешить к нему. Приказал он также разбитые корабли снова исправить, перевернутые волнами поставить прямо и быть готовым к тому времени, когда море снова зальет сушу. Так провел он всю ночь, бодрствуя

и побуждая к деятельности, как вдруг прискакали всадники и вслед за ними столь же быстро поспел прилив. Сначала мелкие и слабые волны стали снимать корабли, но вскоре все поля снова были залиты водой и весь флот был приведен в движение. По всему берегу раздался гром рукоплесканий солдат и моряков, безмерно радовавшихся своему спасению, в котором они уже отчаялись. Откуда же, спрашивали они в изумлении, так внезапно вернулся этот огромный морской прилив? Куда он вчера исчез? И что же это за элемент, то никому непокорный, то подчиненный закону определенных времен? Полагая, на основании происшедшего, что после захода солнца наступит момент прилива, король сейчас же после полуночи выехал с немногими кораблями вдоль по реке, чтобы предупредить прилив. Оставив позади себя устье реки, он увидел себя, наконец, у цели своих стремлений и проехал дальше по морю четыреста стадий. Здесь он принес жертву божествам моря и той местности и вернулся обратно к флоту».

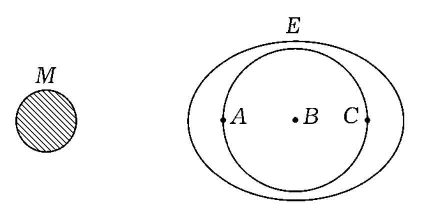


Рис. 137

8. Для объяснения явлений прилива и отлива существенно то, что Земля, как тело твердое, может получить только *одно* определенное ускорение относительно Луны, между тем как подвижные частицы воды на стороне, обращенной к Луне и противоположной от нее, могут получить *различные* ускорения.

Рассмотрим на Земле E, находящейся напротив Луны M, три точки A, B, C. Пусть ускорения этих трех точек относительно Луны, если рассматривать их, как точки свободные, соответственно будут $\varphi + \Delta\varphi$, φ, $\varphi - \Delta\varphi$. Вся же Земля, как твердое тело, имеет ускорение φ. Ускорение к центру Земли мы обозначаем через g. Если мы будем считать все ускорения влево отрицательными и все ускорения вправо положительными, то свободные

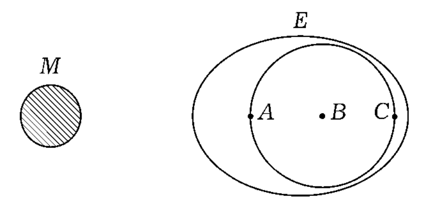


Рис. 138

точки	A	B	C
имеют ускорения	$-(\varphi+\Delta\varphi)+g$	$-\varphi$	$-(\varphi-\Delta\varphi)-g$
ускорение Земли есть	$-\varphi$	$-\varphi$	$-\varphi$
следовательно, ускорение к центру Земли есть	$g-\Delta\varphi$	0	$-(g-\Delta\varphi)$

Мы видим, следовательно, что вес воды в A и C уменьшен на равную величину. В точках A и C вода будет стоять выше и явление прилива должно быть два раза в день.

Не всегда с достаточной ясностью указывается на то, что явление должно было бы быть по существу другим, если бы Луна и Земля не находились друг относительно друга в ускоренном движении, а в состоянии относительного покоя. Если мы применим наше рассуждение к последнему случаю, нам придется в приведенном выше расчете для твердой Земли просто принять $\varphi = 0$. Тогда свободные точки

	A	C
получают ускорения	$-(\varphi+\Delta\varphi)+g$	$-(\varphi-\Delta\varphi)-g$
или	$(g-\Delta\varphi)-\varphi$	$-(g-\Delta\varphi)-\varphi$
или	$g^1-\varphi$	$-(g^1+\varphi)$,

где $g^1 = g-\Delta\varphi$. Таким образом, в точке A вес воды уменьшился бы, а в точке C увеличился бы. Уровень воды в A повысился бы, а в C понизился бы и вода поднялась бы только на стороне, обращенной к Луне.

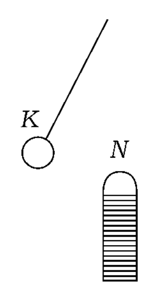


Рис. 139

9. Вряд ли стоит труда доказывать при помощи экспериментов, производство которых удается лишь с трудом, положения, которые всего лучше распознать дедуктивным путем. Но такие эксперименты не невозможны. Представим себе, что небольшой железный шар K колеблется в качестве конического маятника около магнитного полюса. Если мы покроем шар магнитным раствором железной соли, то при достаточно сильных магнитах капля представит нам явление прилива. Но если мы представим себе шар неподвижным относительно магнитного полюса, то капля не окажется заостренной на стороне, обращенной к магнитному полюсу и противоположной, а останется висеть на шарике только на стороне, обращенной к магнитному полюсу.

10. Само собой разумеется, что не следует представлять себе дело так, будто весь прилив сразу вызывается Луной. Мы должны представлять себе прилив, как колебательный процесс, *поддерживаемый* Луной. Если мы, например, будем равномерно двигать веером по водной поверхности кругообразного канала, то это слабое, но постоянное движение вскоре вызовет довольно значительную волну, которая будет следовать за веером. Таково же происхождение прилива. Но здесь только процесс усложняется вследствие неправильных форм континентов, периодического изменения нарушений и т. д.

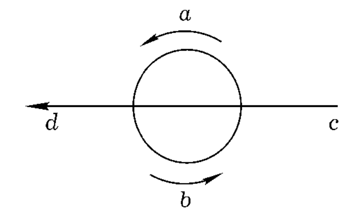


Рис. 139b

11. Из теорий прилива, обнародованных до Ньютона, мы кратко остановимся только на теории Галилея. Галилей объясняет явление прилива относительным движением твердых и жидких частей Земли и видит в этом факте доказательство движения Земли, выдвигая его в качестве одного из главных аргументов в пользу системы Коперника. Если Земля (рис. 139b) вращается с запада на восток и вместе с тем имеет еще поступательное движение, то части Земли получают у a сумму, а у b разность обеих скоростей. Вода в морском бассейне не в состоянии так быстро следовать за этой сменой скоростей и потому может быть представлена находящеюся как бы в колеблющейся чаше или увлекаемой лодкой, движущейся по воде то быстрее, то медленнее. Таков по существу взгляд, развитый Галилеем в диалоге о двух системах мира. Воззрение Кеплера о притяжении Луны кажется ему мистическим и детским. Он относит его к категории объяснений через симпатии и антипатии и разделывается с этим воззрением так же легко, как и с объяснением нарастания прилива действием тепловых лучей и вызванным ими расширением воды. От внимания Галилея не ускользает, конечно, то, что согласно его теории, должна быть в течение дня только *одна* смена прилива и отлива. Но он не оценивает достаточно всех затруднений, полагая, что удастся объяснить ежедневные, месячные и годовые периоды, если будут приняты в соображение собственные колебания воды и изменения движения. Принцип относительного движения есть *правильный* элемент в этой теории, но он нашел столь *неудачное* применение, что он мог привести только к очень неправильной теории. Убедимся сначала в том, что принятые во внимание усло-

вия наверное не могут иметь приписанного им результата. Представим себе правильный водяной шар. Другого результата вращения, кроме соответствующего сплющения шара, мы ожидать не можем. Представим себе еще, что наш шар совершает равномерное поступательное движение. Части его будут, как и раньше, находиться в состоянии относительного покоя друг относительно друга. Ибо этот случай не отличается существенно, по нашему мнению, от предыдущего: поступательное движение шара легко представить себе замещенным противоположным движением всех окружающих его тел. Но даже и для человека, который рассматривает движение, как «абсолютное», равное поступательное движение ничего не изменит в отношении частей друг к другу. Теперь представим себе, что некоторые части шара, различные части которого и без того не обнаруживают стремления двигаться друг относительно друга, отвердевают, так что образуются морские бассейны с жидкой еще водой. Равномерное вращение шара, не потерпев никаких нарушений, будет продолжаться дальше, и следовательно, теория Галилея неправильна. При всем том мысль Галилея кажется с первого взгляда вполне приемлемой. Как же объяснить этот парадокс? Все дело в *отрицательном* понимании закона инерции. Если же поставить вопрос, *какие ускорения* испытывает вода, то все становится ясным. *Свободная от действия тяжести* вода была бы при первом же обороте отброшена. *Тяжелая же* вода описывает в своем движении кривую с центром в центре Земли. Она должна была бы при своей ничтожной скорости вращения еще больше приблизиться к центру Земли, если бы сопротивление ниже лежащей массы не уничтожало как раз такую часть центростремительного ускорения, что остаток его как раз достаточен для центрального движения по кругу с данной тангенциальной скоростью. При таком понимании исчезает всякое сомнение и всякая неясность. Но можно прибавить, что Галилей должен был обладать сверхчеловеческим гением, чтобы увидеть все, как оно есть, до конца. Он должен был бы для этого еще проделать все великие открытия Гюйгенса и Ньютона.

5. Критика принципа противодействия и понятия массы

1. Познакомившись с воззрениями Ньютона, мы достаточно подготовлены, чтобы исследовать их критически. Ограничимся при этом сначала понятием массы и принципом противодействия. Они не могут

быть отделены друг от друга в исследовании и в обоих лежит центр тяжести открытий Ньютона.

2. Прежде всего мы не видим в «количестве материи» представления, которое было бы способно объяснить и иллюстрировать понятие массы, ибо оно само не обладает достаточной ясностью. Мы можем это сказать и в том случае, если мы, подобно некоторым авторам, дойдем до счета гипотетических атомов. Мы этим накопляем только представления, которые сами нуждаются в доказательстве. При сложении многих равных химически однородных тел можно еще связать с «количеством материи» ясное представление и признать, что сопротивление движению возрастает вместе с этой массой. Но если мы оставим мысль о химической однородности, то допущение, что от *различных* тел остается еще кое-что, что можно измерять *одной и той же* мерой и что можно назвать количеством материи, правда, кажется вероятным на основании данных опыта механики, но все же нуждается еще в доказательстве. Таким образом, если мы вместе с Ньютоном относительно давления грузов делаем допущение $p = mg$, $p' = m'g$ и отсюда делаем вывод $\frac{p}{p'} = \frac{m}{m'}$, то в этом заключается уже нуждающееся еще в доказательстве *допущение* измеримости различных тел *одной и той же мерой.*

Мы могли бы также *произвольно* установить $\frac{m}{m'} = \frac{p}{p'}$, т. е. отношение масс определить, как отношение давлений грузов при одном и том же g. Но тогда оставалось бы еще *обосновать* применение, которое делается из этого понятия массы в принципе противодействия и при других случаях.



Рис. 140a Рис. 140b

3. Когда друг другу противопоставлены два во всех отношениях совершенно равных тела, то, на основании привычного нам принципа симметрии, мы ожидаем, что они должны сообщать друг другу противоположные ускорения в направлении линии, соединяющей эти тела. Но как только в этих телах существует какое-нибудь, хотя бы малейшее, неравенство формы, химических свойств и т. д., принцип симметрии нас оставляет, *если мы заранее не принимаем или не знаем*, что равен-

ство формы, например, или равенство химических свойств здесь значения не имеет. Но если мы знаем из данных опыта механики о существовании какого-либо особого признака тел, определяющего ускорение их, ничто нам не мешает произвольно установить следующее:

Телами равной массы мы называем такие, которые, действуя друг на друга, сообщают друг другу равные и противоположные ускорения. Этим мы *назвали* только отношение, существующее в действительности. Аналогично мы поступим и в более общем случае. Тела A и B, действуя друг на друга, получают соответственно ускорения $-\varphi$ и $+\varphi'$, причем направление обозначаем знаками $-$ и $+$. Тогда мы говорим, что тело B имеет массу в $-\frac{\varphi}{\varphi'}$ раз меньшую, чем тело A. *Если мы примем сравниваемое тело A за единицу, то массу m мы будем приписывать тому телу, которое телу A сообщает в m раз большее ускорение, чем то, которое оно получает вследствие противодействия тела A.* Отношение масс есть отрицательное и обратное отношение взаимных ускорений. Что эти ускорения всегда имеют противоположные знаки, что существуют, следовательно, согласно нашему определению, только положительные массы, этому учит и может учить только опыт. В нашем понятии массы нет никакой теории, «количество материи» в нем совершенно излишне, в нем содержится лишь точное определение, обозначение и название действительного факта.

Часто повторяли устно и письменно возражение H. Streintz'а («Die physikalischen Grundlagen der Mechanik», Leipzig, 1883, стр. 117), что сравнение масс, соответствующее моему определению, могло бы произойти только астрономическим путем. Но я не могу признать это возражение правильным. Сказанное мною на стр. 166, 173–175 достаточно доказывает противное. И при ударе, как и в случае сил электрических, магнитных, на атвудовой машине через посредство нити массы сообщают друг другу ускорения. В моем учебнике физики (2 изд., 1891, стр. 27) я показал, как отношение масс может быть вполне элементарным и популярным образом доказано при помощи опыта с центробежной машиной. Таким образом, можно считать это возражение опровергнутым.

Мое определение имеет своим источником стремление установить *взаимную зависимость между явлениями* и устранить всякую физическую неясность, не давая однако меньше того, что дает какое бы то ни было другое из существовавших до сих пор определений. Тем же самым путем я шел при определении понятий «количество электричест-

ва» («Ueber die Grundbegriffe der Elektrostatik. Vortrag gehalten auf der internationalen elektrischen Ausstellung», Wien am 4 September, 1883), «температура», «количество теплоты» («Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Uuterricht», Berlin, 1888, 1. Heft) и т. д. Но изложенное здесь определение понятия массы приводит к другому затруднению, которого при условии более строгой критики нельзя не заметить и при анализе других физических понятий, например, понятий теории теплоты. Максвелл указал на этот пункт при исследовании понятия температуры приблизительно около того же времени, когда я это сделал относительно понятия массы. Укажу здесь на соответственное место в моем сочинении «Die Principien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt» (Leipzig, 1896), в особенности стр. 41 и стр. 190.

4. Рассмотрим теперь это затруднение, устранение которого безусловно необходимо для установления совершенно ясного понятия массы. Рассмотрим ряд тел A, B, C, D ... и будем сравнивать все с телом A, как с единицей.

$$\begin{array}{cccccc} A, & B, & C, & D, & E, & F, \\ 1, & m, & m', & m'', & m''', & m''''. \end{array}$$

Мы получаем тогда соответственные величины массы 1, m, m', m'' ... и т. д. Возникает следующий вопрос: если мы выберем для сравнения (в качестве единицы) тело B, то получим ли мы для тела C величину массы $\frac{m'}{m}$, для тела D — величину $\frac{m''}{m}$, или мы получим совсем другие величины? В более простой форме тот же вопрос можно поставить так: если два тела B, C, взаимодействуя с телом A, относились друг к другу, как равные массы, то будут ли они относиться, как массы равные, взаимодействуя друг с другом? Нет никакой *логической* необходимости, чтобы две массы, равные третьей, были между собой равны. Ибо речь идет здесь о вопросе не математическом, а *физическом*. Очень ясно это становится, если прибегнуть для объяснения к соотношению аналогичному. Мы располагаем рядом тела A, B, C в таких весовых количествах a, b, c, в которых они вступают в химические соединения AB, AC. И вот и здесь нет вовсе никакой *логической* необходимости, чтобы и в химическое соединение BC тела B и C тоже входили в тех же весовых количествах b, c. Но что оно так, мы это знаем из опыта. Если мы располагаем рядом несколько тел в порядке их весовых количеств, в которых они соединяются с телом A, то они соединяются и между собой в *тех же самых* весовых количествах.

Но этого никто не мог бы знать без опыта. И таким же образом дело обстоит с величинами массы тел.

Если бы приняли, что порядок комбинации тел, которым определяются величины их массы, имеет влияние на эти величины, то последствия, вытекающие из такого допущения, оказались бы в противоречии с опытом. Представим себе, например, три упругих тела A, B, C, движущиеся по абсолютно гладкому и неподвижному кольцу. Мы предполагаем, что тела A и B, как и тела B и C относятся друг к другу как равные массы. Во избежание противоречий с опытом мы должны тогда принять, что и тела C и A относятся друг к другу, как равные массы. Если мы сообщим телу A какую-нибудь скорость, то, ударившись о тело B, оно сообщит ему ту же скорость, а эта последняя таким же образом передаст эту скорость телу C. Но если бы тело C относилось к телу A, как большая масса, то и тело A получило бы при ударе большую скорость, а у тела C остался бы еще некоторый остаток. С каждым оборотом в направлении часовой стрелки *живая сила системы возрастала бы.* Если бы тело C было меньшей массы, сравнительно с телом A, то было бы достаточно сделать движение обратным, чтобы получить тот же результат. Но такой непрерывный рост живой силы оказывается в вопиющем противоречии со всеми *данными нашего опыта.*

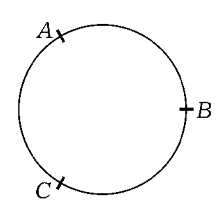


Рис. 141

5. Полученное таким образом понятие массы делает совершенно ненужным установление особого принципа противодействия. Дело в том, что и в понятии массы, и в принципе противодействия, как мы это заметили уже в случае, приведенном выше, формулирован *дважды один и тот же* факт, что является уже излишним. Когда друг на друга действуют две массы 1 и 2, то уже в нашем определении заключается то, что они сообщают друг другу противоположные ускорения, относящиеся друг к другу, как 2 : 1.

6. Из того же нашего определения массы может быть выведена *измеримость массы весом* тела (при постоянном ускорении тяжести). Мы непосредственно ощущаем увеличение или уменьшение какого-нибудь давления. Но это ощущение представляет лишь крайне ненадежную меру величины давления. Точную, пригодную меру давления дает нам замечание, что

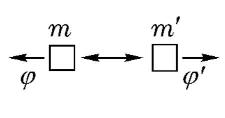


Рис. 142

каждое давление может быть замещено давлением суммы однородных грузов. Каждое давление может быть уравновешено давлением таких грузов. Пусть два тела m и m' получают от внешних причин соответственно ускорения φ и φ', имеющие противоположное направление. Пусть оба тела связаны между собой нитью. Если существует равновесие, то ускорение φ в теле m и ускорение φ' в теле m' как раз уничтожены *взаимодействием*. В данном случае, следовательно, $m\varphi = m'\varphi'$. Поэтому, если $\varphi = \varphi'$, что происходит в действительности, когда тела предоставлены действию силы тяжести, то в случае равновесия мы имеем также $m = m'$. Несущественно, разумеется, связаны ли эти два тела непосредственно нитью или нитью, переброшенной через блок, или они действуют друг на друга, находясь на двух чашах весов. Измеримость массы весом при нашем определении очевидна и без мысли о *«количестве материи»*.

7. Таким образом, раз только мы, следуя указаниям опыта, *рассмотрели* существование особого *определяющего ускорение признака* тел, наша задача исчерпывается признанием и недвусмысленным обозначением этого *факта*. Дальше признания этого факта мы пойти не можем и всякая попытка пойти отсюда дальше приводит только к неясностям. Всякая неловкость исчезает, раз только мы выяснили себе, что в понятии массы не содержится никакой теории, а содержится только опыт. Понятие это до сих пор оправдывало себя. В высшей степени невероятно, но не невозможно, чтобы оно в будущем потерпело крушение, как представление неизменного количества теплоты, которое тоже было основано на данных опыта, потерпело видоизменение под влиянием новых данных опыта.

6. Воззрения Ньютона насчет времени, пространства и движения

1. В примечании, непосредственно следующем за его определениями, Ньютон высказывает свои взгляды насчет времени и пространства, на которых нам нужно остановиться несколько подробнее. Приведем сначала дословно важнейшие места оттуда, необходимые для характеристики этих взглядов.

«До сих пор я старался объяснить, в каком смысле следует понимать обозначения, менее знакомые. *Времени, пространства, места*

и движения, как обозначений всем знакомых, я не объясняю. Замечу только, что величины эти обыкновенно понимаются не иначе, как в отношении к нашим чувствам, и таким образом возникают некоторые предрассудки. Для устранения их будет полезно разделить эти величины на абсолютные и относительные, истинные и мнимые, математические и обыкновенные.

1. *Абсолютное, истинное и математическое* время протекает само по себе и, благодаря своей природе, равномерно и без всякой связи с каким-либо внешним предметом. Обозначается оно также именем *«продолжительность»*.

Относительное, мнимое и обыкновенное время есть чувствуемая и внешняя, точная или неравная мера продолжительности, которой мы пользуемся обыкновенно вместо истинного времени; таковы: час, день, месяц, год.

Дело в том, что естественные дни, которые мы обыкновенно, как меры времени, считаем равными, в действительности не равны. Это неравенство исправляется астрономами, измеряющими движение небесных тел, согласно правильному времени. Возможно, что равномерного движения, которым можно было бы точно измерять время, нет, а все движения могут быть ускорены или замедлены. Но *абсолютное* время не может быть изменено в своем течении. Одна и та же продолжительность и одно и то же состояние соответствуют существованию всех вещей, безразлично, скоры ли движения, медленны ли или равны нулю».

2. Кажется, как будто в приведенных выше замечаниях Ньютон находится еще под влиянием средневековой философии, будто он *изменил* своему намерению исследовать только *фактическое*. Если вещь A изменяется со временем, то это означает только то, что условия вещи A зависят от условий другой вещи B. Колебания маятника происходят *во времени*, если его отклонения *зависят* от положения Земли. Так как при наблюдении маятника нам нет надобности принимать во внимание зависимость от положения Земли, а можем сравнивать его с какой-либо другой вещью (состояния которой, конечно, опять-таки зависят от положения Земли), то легко получается иллюзия, будто все эти вещи несущественны. Мы можем даже, наблюдая маятник, совершенно отвлечься от всех остальных внешних вещей и мы тогда находим, что для каждого положения наши мысли и ощущения другие. Вследствие этого кажется, что время есть нечто особенное, от течения которого

зависит положение маятника, между тем как вещи, которые мы свободно привлекаем для сравнения, играют как будто случайную роль. Но мы не должны забывать того, что все вещи неразрывно связаны между собою и что сами мы со всеми нашими мыслями составляем лишь часть природы. Мы совершенно не в состоянии *измерять временем* изменение вещей. Напротив, время есть абстракция, к которой мы приходим через посредство изменения вещей, потому что у нас нет никакой *определенной* меры, ибо все они между собою связаны. Мы называем равномерным такое движение, в котором равные приращения пути соответствуют равным приращениям пути другого движения, выбранного для сравнения (вращение Земли). Движение может быть равномерным относительно другого движения. Вопрос, равномерно ли движение *само по себе*, не имеет никакого смысла. В такой же мере мы не можем говорить об «абсолютном времени» (независимо от всякого изменения). Это абсолютное время не может быть измерено никаким движением и поэтому не имеет никакого ни практического, ни научного значения, никто не вправе сказать, что он что-нибудь о таком времени знает, это праздное «метафизическое» понятие.

Что наши представления времени получаются вследствие взаимной зависимости вещей, было бы не трудно доказать и психологически, и исторически, и филологически (разбором названий различных промежутков времени). В наших представлениях времени находит свое выражение самая глубокая и самая общая связь вещей. Если происходит движение во времени, то оно зависит от движения Земли. Этому не противоречит то, что механические движения обратимы. Несколько переменных величин могут так зависеть друг от друга, что в одной группе их могут происходить изменения, в то время, как в остальных никаких изменений не бывает. Природа подобна машине. Отдельные части ее взаимно определяют друг друга. Но в то время, как в машине положение одной части определяет положения всех остальных частей, в природе существуют более сложные соотношения. Эти соотношения лучше всего представлять себе в виде известного числа n величин, удовлетворяющих меньшему числу n' уравнений. Если бы $n = n'$, то природа не знала бы изменений. При $n' = n - 1$ одна величина определяет все остальные. Если бы в природе существовало такое соотношение, то и время было бы обратимо, если бы только это было достижимо однимединственным движением. Истинное же положение вещей характеризуется другой разностью между n и n'. Величины определяют друг

друга только частично, но они сохраняют бо́льшую неопределенность или свободу, чем в последнем случае. Мы сами чувствуем себя таким элементом природы, частью определенным и частью неопределенным. Поскольку лишь одна часть изменений, происходящих в природе, зависит от нас и может быть нами восстановлена, время не представляется нам обратимым и протекшего времени мы вернуть не можем.

Говоря кратко и общепонятно, мы приходим к представлению времени через посредство связи содержания поля наших воспоминаний с содержанием поля наших восприятий. Когда мы говорим, что время протекает в определенном направлении, то это означает, что физические, а следовательно и физиологические, процессы протекают только в одном определенном направлении[1]. Все разности температур, электрического потенциала, разности уровней вообще, предоставленные самим себе, становятся не большими, а меньшими. Рассмотрим два предоставленных самим себе соприкасающихся тела неравной температуры. Здесь могут столкнуться только большие разности температур в поле воспоминаний с меньшими в поле восприятий, но не наоборот. Во всем этом выражается только своеобразная глубокая связь вещей. Но требовать уже здесь полного выяснения значит предвосхищать по примеру спекулятивной философии результаты всех специальных исследований будущего, т. е. предвосхищать совершенное естествознание, развитие которого завершилось.

Подробное рассуждение о *физиологическом* времени, об ощущении времени и частью также о *физическом* времени можно найти в другой моей книге («Анализ ощущений», изд. С. А. Скирмунта). Как при изучении процессов тепловых мы выбираем в качестве меры температуры некоторый параллельный *ощущению* теплоты *произвольный* (термометрический) объем, свободный от неподдающихся контролю нарушений органа ощущений, так мы по аналогичным причинам выбираем в качестве меры времени параллельное ощущению времени и *произвольное движение* (угол вращения Земли, путь предоставленного себе самому тела). Если вполне уяснить себе, что дело идет только об установлении *взаимной зависимости* между явлениями, как я это указал еще в 1865 году («Ueber den Zeitsinn des Ohres», Sitzungsber. d. Wiener Akademie) и в 1866 году (Fichte's Zeitschr. f. Philosophie), то вся-

[1] О физиологической природе ощущений времени и пространства см. «Анализ ощущений» (Изд. С. А. Скирмунта).

кие метафизические неясности исчезают. (См. Epstein, «Die logischen Principien der Zeitmessung», Berlin, 1887).

В другом месте («Principien der Wärmelehre», стр. 51) я попытался показать, на чем основана естественная склонность человека гипостазировать свои ценные для него понятия и в особенности те, к которым он пришел инстинктивно, не зная истории их развития. Рассуждения, относящиеся там к понятию температуры, легко могут быть перенесены и на понятия времени и объясняют происхождение ньютонова «абсолютного времени». Указывается здесь также и на связь понятия энтропии с необратимостью времени (стр. 338) и высказывается тот взгляд, что энтропия мира, если бы она вообще могла быть определена, действительно представляла бы некоторый род абсолютной меры времени. Наконец, я должен здесь указать еще на рассуждения Петцольдта («Das Gesetz der Eindeutigkeit», Vierteljahrschr. f. w. Philosophie, 1894, стр. 146), на которые я отвечу в другом месте.

3. Подобные же взгляды Ньютон развивает не только насчет времени, но и насчет пространства и движения. Приведем опять несколько характерных мест.

«II. Благодаря своей природе и вне связи с каким-нибудь внешним предметом абсолютное пространство остается всегда равным и неподвижным.

... Относительное пространство есть мера или подвижная часть первого, т. е. абсолютного пространства, которое наши чувства обозначают его положением относительно других тел и обыкновенно принимают за пространство неподвижное.

VI. Абсолютное движение есть перенесение тела из одного абсолютного места в другое, а относительное движение есть перенесение тела из одного относительного места в другое.

Так мы, и не без удобства, пользуемся в области человеческих отношений *относительными* местами и движениями вместо *абсолютных*, в учении же о природе приходится абстрагировать наши чувства. Дело в том, что может оказаться и так, что не существовало ни одного действительно покоящегося тела, к которому можно было бы относить все места и движения.

Действующими причинами, из-за которых абсолютные и относительные движения различны между собою, являются центробежные силы, направленные от оси движения. При движении в круге только относительном эти силы не существуют. Но они бывают больше или меньше, в зависимости от величины абсолютного движения.

Подвесим, например, сосуд на очень длинной нити, будем его вращать постоянно в круге, пока нить не закрутится очень сильно, и, наполнив сосуд водой, приведем сосуд в состояние покоя. Если под действием мгновенной силы сосуд будет приведен в противоположное круговое движение и это движение будет продолжаться долго, а нить будет разворачиваться, то поверхность воды будет сначала плоской, как до движения сосуда, но потом, когда сила начнет постепенно действовать на воду, сосуд действует на нее так, что она начинает заметно вращаться обратно. Она постепенно отдаляется от середины, поднимается у стенок сосуда и таким образом образует некоторое полое углубление. (Этот опыт я проделал сам).

Вначале, когда *относительное* движение воды в сосуде было наибольшим, вода не обнаруживала ни малейшего стремления удалиться от оси. Она не стремилась приблизиться к краю, поднимаясь вдоль стенок, а оставалась плоской и *истинное* кругообразное движение до этого еще не начиналось. Но потом, когда относительное движение воды стало уменьшаться, ее поднятие по стенкам сосуда стало указывать на стремление удалиться от оси, каковое стремление указывало на всевозрастающее *истинное* круговое движение воды, покуда это движение не стало, наконец, наибольшим, когда вода сама *относительно* находилась в сосуде в состоянии покоя.

Впрочем, узнавать *истинные* движения отдельных тел и различать их от *мнимых* очень трудно, потому что части того неподвижного пространства, в которых тела действительно движутся, не могут быть чувственно познаны.

Дело однако не вполне безнадежно. Дело в том, что необходимые для этого вспомогательные средства могут быть получены частью из мнимых движений, каковы бы ни были их отличия от истинных, частью же из сил, которые лежат в основе истинных движений, как действующие причины. Если, например, связать нитью два шара, находящихся на данном расстоянии друг от друга, и так вращать их около обычного центра тяжести, то по натяжению нити можно заметить стремление шаров удалиться от оси движения, и отсюда можно рассчитать величину кругового движения. Если теперь заставить одновременно действовать на обе стороны произвольные равные силы, чтобы увеличить или уменьшить круговое движение, то по увеличенному или уменьшенному натяжению нити можно было бы узнать увеличе-

ние или уменьшение движения, а отсюда, наконец, можно было бы найти те стороны шаров, на которые должны действовать силы для того, чтобы движение наисильнейшим образом увеличивалось, т. е. сторону заднюю или ту, которая следует за круговым движением. Но раз была бы узнана именно эта следующая за круговым движением сторона и противоположная ей, предшествующая этому движению, то было бы найдено и направление движения. Таким образом можно было бы найти величину и направление этого кругового движения в каждом бесконечно большом пустом пространстве, даже если бы там не было ничего внешнего и заметного, при помощи чего можно было бы сравнить шары».

4. Вряд ли есть необходимость заметить здесь, что и в приведенных здесь рассуждениях Ньютон изменяет своему намерению исследовать только *фактическое*. Об абсолютном пространстве и абсолютном движении никто ничего сказать не может; это чисто абстрактные вещи, которые на опыте обнаружены быть не могут. Все наши основные принципы механики представляют собою, как это было уже подробно показано, данные опыта об относительных положениях и движениях тел. Не следует и невозможно принимать их без проверки в областях, в которых их в настоящее время признают правильными. Никто не вправе расширять сферы действия этих основных принципов за пределы опыта. Такое расширение даже бессмысленно, ибо никто не сумел бы найти ему применение

Перейдем теперь к подробностям. Когда мы говорим, что тело K изменяет свое направление и скорость только под действием другого тела K', то мы вовсе не можем прийти к этому познанию, если нет налицо других тел A, B, C, ... , относительно которых мы судим о движении тела K. Таким образом, мы познаем собственно некоторое отношение тела K к телам A, B, C, ... Если же мы вдруг абстрагируем тела A, B, C, ... и хотим говорить о теле K в абсолютном пространстве, то мы совершаем двойную ошибку. Во-первых, мы не можем знать, что будет делать тело K при отсутствии тел A, B, C,... Во-вторых, у нас не было бы совсем средств судить о том, что делает тело K, и проверить наше суждение об этом, которое поэтому и не имело бы никакого естественнонаучного значения.

Два тела K и K', действуя притягивающим образом друг на друга, сообщают друг другу ускорения, обратно пропорциональные их массам m, m', в направлении соединяющей их линии. В этом правиле со-

держится не только отношение тел K и K' друг к другу, но и отношение их к остальным телам. Ибо в этом правиле сказано не только то, что тела K и K' испытывают друг от друга ускорение $\varkappa\frac{m \times m'}{r^2}$, но и то, что тело K испытывает в направлении соединяющей их линии ускорение $-\frac{\varkappa m'}{r^2}$, а тело K' — ускорение $+\frac{\varkappa m}{r^2}$, что может быть установлено только в случае присутствия еще других тел.

Движение какого-нибудь тела K всегда может быть оценено только по отношению к другим телам $A, B, C, \ldots$ Так как в нашем распоряжении всегда имеется достаточное число неподвижных друг относительно друга или лишь медленно изменяющих свое положение тел, то мы вовсе не ограничены при этом одним *определенным* телом и мы можем попеременно абстрагировать то одно, то другое. Отсюда и возникло мнение, будто эти тела вообще безразличны.

Было бы возможно, чтобы изолированные тела $A, B, C, \ldots$. играли лишь случайную роль при определении движения тела K, чтобы движение было определено *средой*, в которой находится тело K. Но тогда было бы необходимо заменить абсолютное пространство Ньютона этой средой. Этого представления у Ньютона решительно не было. К тому же нетрудно доказать, что воздух не есть эта среда, определяющая движение. Пришлось бы поэтому представлять себе какую-нибудь другую наполняющую мировое пространство среду, о свойствах которой, как и о динамическом ее отношении к находящимся в ней телам, мы в настоящее время мало знаем. Само по себе такое соотношение не невозможно. Новейшими гидродинамическими исследованиями установлено, что твердое тело в жидкости, свободной от трения, испытывает сопротивление только в случае *изменения* скорости. Правда, этот результат теоретически выведен из представления инерции, но его можно, наоборот, рассматривать и как первый факт, из которого следует исходить. Если бы практически с этим представлением покуда ничего еще достичь невозможно было, то все же оставалась бы надежда, что мы в будущем больше еще узнаем об этой гипотетической среде, и с естественнонаучной точки зрения она все еще была бы более ценной, чем рискованная мысль об абсолютном пространстве. Если мы примем во внимание, что мы не можем устранить изолированные тела $A, B, C, \ldots$ и, следовательно, опытом ничего не можем решить относительно их существенной или случайной роли, что эти тела до сих пор были единственным и достаточным также средством для ориенти-

рования относительно движений и для описания механических фактов, мы придем к тому заключению, что покуда полезно принимать, что движения определяются этими телами.

5. Рассмотрим теперь тот пункт, на котором Ньютон с большим правом как будто основывается в своих различениях относительного и абсолютного движений. Если Земля имеет *абсолютное* вращение около своей оси, то в ней развиваются центробежные силы, она сплющивается, ускорение тяжести уменьшается на экватор, плоскость маятника Фуко поворачивается и т. д. Все эти явления исчезают, если Земля остается в покое, а остальные небесные тела вращаются около нее в абсолютном движении, так что в результате получается то же самое *относительное* вращение. Так оно происходит, правда, при том условии, если заранее исходят из представления абсолютного пространства. Но если мы не хотим оставлять почвы фактов, то мы знаем только о пространствах и движениях *относительных*. Если абстрагировать неизвестную и непринимаемую во внимание среду мирового пространства, то — относительно — движения в мировой системе, и с точки зрения учения Птоломея, и с точки зрения учения Коперника, одни и те же. Оба учения также одинаково *правильны*, но последнее только проще и *практичнее*. Система мира нам не дана *дважды* с Землей, покоящейся и вращающейся, а дана только *однажды* с ее единственно поддающимися определению относительными движениями. Мы поэтому не можем сказать, что было бы, если бы Земля не вращалась. Мы можем единственный данный нам случай объяснять различным образом. Но когда наши объяснения таковы, что они оказываются в противоречии с данными опыта, то именно *мы* неправильно объясняем. Основные принципы механики могут быть поэтому так составлены, чтобы и при относительных движениях получались центробежные силы.

Опыт Ньютона с вращающимся сосудом с водой показывает только то, что относительное вращение воды по отношению к *стенкам сосуда* не пробуждает заметных центробежных сил, но что эти последние пробуждаются относительным вращением по отношению к массе Земли и остальным небесным телам. Никто не может сказать, как протекал бы опыт, если бы стенки сосуда становились все толще и массивнее, пока, наконец, толщина их не достигла бы нескольких миль. Налицо перед нами только один опыт и нам остается привести его в согласие со всеми остальными известными нам фактами, но не с произвольными созданиями нашей фантазии.

6. У нас не может быть сомнений насчет значения закона инерции, если мы вспомним, как он был найден. Галилей впервые заметил неизменяемость скорости и направления тела относительно вещей на Земле. Большинство земных движений бывают столь малой продолжительности и протяженности, что нет вовсе надобности принимать во внимание изменения скорости поступательного движения Земли относительно небесных тел, как и вращение этих последних. Только в случае далеко брошенных тел (пуль), при колебаниях маятника Фуко и т. д. оказывается необходимым принимать это во внимание. Когда же Ньютон попытался применить к системе планет принципы механики, найденные со времени Галилея, он заметил, что, насколько вообще можно судить, планеты в такой же мере сохраняют как будто свое направление и скорость относительно очень удаленных, как будто бы неподвижных друг относительно друга мировых тел (если не принимать во внимание действий сил), как это делают движущиеся на Земле тела относительно неподвижных объектов Земли. Отношение земных тел к Земле может быть сведено к их отношению к отдаленным небесным телам. Если бы мы стали утверждать, что мы о движущихся телах знаем больше, чем это данное в опыте отношение их к небесным телам, мы поступили бы *нечестно.* Поэтому, если мы говорим, что тело сохраняет свое направление и скорость в *пространстве*, то в этом заключается только краткое указание на то, что принимается во внимание *весь мир.* Изобретатель принципа может позволить себе это сокращение потому, что он знает, что осуществление этого указания обыкновенно не встречает никаких затруднений. Но он никак не может помочь, когда такие затруднения все же возникают, когда, например, необходимые неподвижные друг относительно друга тела отсутствуют.

7. Вместо того чтобы относить движущееся тело K к пространству (к какой-нибудь системе координат), мы будем теперь прямо рассматривать его отношение к *телам* мирового пространства, которыми эта система координат только и может быть *определена.* Очень далекие друг от друга тела, движущиеся относительно других далеких и неподвижных тел с постоянным направлением и постоянной скоростью, изменяют взаимное между собою расстояние пропорционально времени. Можно также сказать, что в случае очень далеких тел расстояния между ними, если отвлечься от действующих друг на друга или других сил, изменяются пропорционально этим телам. Два тела, которые на небольшом расстоянии друг от друга двигаются с постоянным направле-

нием и постоянной скоростью относительно других неподвижных тел, находятся в отношении более сложном. Если мы будем рассматривать оба тела, как зависимые друг от друга, если r есть расстояние между ними, t — время и a — некоторая постоянная величина, зависящая от направлений и скоростей, мы получим: $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{r}\left[a^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]$. Очевидно, гораздо *проще и нагляднее* рассматривать оба тела, как независимые друг от друга, и принимать во внимание неизменяемость их направлений и скоростей относительно других неподвижных тел.

Вместо того чтобы сказать, что направление и скорость какой-нибудь массы μ остаются в пространстве постоянными, можно также употребить выражение, что среднее ускорение массы μ относительно масс m, m', m'' ... на расстояниях r, r', r'' ... $= 0$ или $\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sum mr}{\sum m} = 0$. Последнее выражение эквивалентно первому, если только принимают во внимание достаточно много масс, достаточно далеких и больших. При этом само собой отпадает взаимное влияние более близких меньших масс, которые как будто не оказывают друг на друга никакого влияния. Что неизменные направление и скорость даны приведенным условием, легко убедиться, если из массы μ, как вершины, провести конусы, вырезающие в мировом пространстве различные части, и применить наше условие к массам этих отдельных частей. Можно, конечно, и для *всего* пространства, окружающего массу μ, принять $\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sum mr}{\sum m} = 0$. Но в этом уравнении не говорится ничего о движении массы μ, так как оно применимо ко всякого рода ее движениям, если только она равномерно окружена бесконечно многими массами. Если две массы μ_1, μ_2 действуют друг на друга с силой, зависящей от их расстояния r, то мы имеем $\frac{d^2r}{dt^2} = (\mu_1 + \mu_2)f(r)$. Но при этом ускорение центра тяжести обеих масс или среднее ускорение системы масс (согласно принципу противодействия) относительно масс мирового пространства остается равным нулю, т. е.

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\mu_1\frac{\sum mr_1}{\sum m} + \mu_2\frac{\sum mr_2}{\sum m}\right) = 0.$$

Если мы примем во внимание, что содержащееся в ускорении время есть не что иное, как мера расстояний (или углов вращения) мировых тел, мы увидим, что даже в простейшем случае, в котором мы

как будто занимаемся взаимодействием только *двух* масс, отвлечься от остального мира *невозможно.* Дело именно в том, что природа не начинает с элементов, как мы вынуждены начинать. Для нас во всяком случае счастье то, что мы в состоянии временами отвлечь наш взор от огромного целого и сосредоточиться на отдельных частях его. Но мы не должны упускать из виду, что необходимо впоследствии дополнить и исправить дальнейшим исследованием то, что мы временно оставили без внимания.

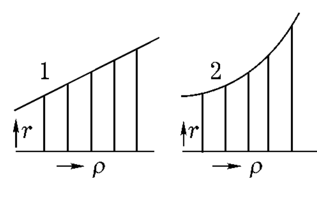


Рис. 143

8. Приведенные здесь рассуждения показывают, что нам нет вовсе надобности относить закон инерции к какому-нибудь особому абсолютному пространству. Напротив, мы видим, что, как те массы, которые, согласно обычному выражению, действуют друг на друга, так и те, которые друг на друга не действуют, находятся в совершенно однородных друг к другу отношениях ускорения, и именно можно считать, что *все* массы находятся в связи друг с другом. То, что в отношениях масс *ускорения* их играют выдающуюся роль, мы должны принять, как факт опыта. Это однако не исключает того, чтобы мы попытались *выяснить* этот факт сравнением его с другими фактами, что может привести к новым точкам зрения. Во всех процессах природы играют решающую роль *разности* известных величин u. Разности температуры, потенциальной функции и т.д. приводят к процессам, которые заключаются в уравнивании этих разностей. Известные выражения $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dz^2}$, имеющие определяющее значение для рода этого уравнивания, могут служить мерой уклонения состояния какой-нибудь точки от среднего состояния окружающей ее среды, к каковому среднему состоянию эта точка стремится. Аналогичным образом могут быть поняты ускорения масс. Большие расстояния масс, между которыми не действуют какие-нибудь особые силы, изменяются *пропорционально друг другу.* Таким образом, если мы одно известное расстояние ρ отнесем как абсциссу, а другое r как ординату, мы получим прямую линию. Каждая ордината r, соответствующая известной абсциссе ρ, представляет тогда среднюю величину из соседних ординат. Если между телами действуют какие-нибудь силы, то этим определяется величина $\frac{d^2r}{dt^2}$, которую мы, согласно приведенным выше замечаниям, можем заменить

выражением $\frac{d^2r}{d\rho^2}$. Таким образом, если между телами действуют какие-нибудь силы, то этим определяется известное *отклонение* ординаты r от *средней величины из соседних ординат*, каковое отклонение, не будь этого действия силы, не существовало бы. Этим кратким указанием мы должны здесь удовлетвориться.

9. Мы сделали выше попытку дать закону инерции выражение, отличающееся от обыкновенного. Это новое выражение служит так же, как обычное, покуда есть достаточное число тел в мировом пространстве, как будто бы неподвижных. Оно так же легко применяется и наталкивается на те же затруднения. В одном случае мы не можем заполучить абсолютного пространства, в другом случае нашему познанию доступно лишь ограниченное число масс и намеченное суммирование не может быть поэтому доведено до конца. Продолжало ли бы новое выражение соответствовать еще действительному положению вещей, если бы звезды стали быстро двигаться друг относительно друга, указать невозможно. Невозможно из имеющегося налицо более специального опыта конструировать опыт более общий. Мы должны *подождать*, пока у нас не будет такой более общий опыт. Мы получим его, быть может, по мере расширения наших физико-астрономических знаний, где-нибудь в небесном пространстве, где происходят более сильные и более сложные движения, чем в окружающей нас среде. Важнейший же результат наших исследований сводится к следующему: *именно простейшие с виду принципы механики очень сложны*; *они основаны на незавершенных и даже недоступных полному завершению данных опыта*; *практически они, правда, достаточно проверены для того, чтобы, принимая во внимание достаточную устойчивость окружающей нас среды, служить основой для математической дедукции, но сами они вовсе не могут рассматриваться, как математические истины, а они должны рассматриваться, напротив того, как принципы, не только способные поддаваться непрерывному контролю опыта, но даже нуждающиеся в нем.* Это познание очень ценно, ибо оно содействует научному прогрессу.

10. С 1883 года появилось немало сочинений о законе инерции, представляющих отрадное доказательство возросшего интереса к этому вопросу. Из этих сочинений я кратко остановлюсь здесь сначала на сочинениях Streinz'a («Physikalische Grundlagen der Mechanik», Leipzig, 1883) и L. Lange («Die geschichtliche Entwickelung des Bewegungsbegriffes», Leipzig, 1886).

Streinz прав, считая выражение «абсолютное прямолинейное посту-

пательное движение» логически бессодержательным и объявляя соответственно с этим известные аналитические выводы излишними. Но относительно *вращения* он вместе с Ньютоном все же полагает, что нужно различать вращение *абсолютное* и относительное. С этой точки зрения, следовательно, можно всякое тело без абсолютного вращения избрать в качестве тела, к которому надо относить другие тела, для выражения закона инерции.

Я не могу согласиться с этим взглядом. Для меня вообще существует *только* относительное движение (см. «Erhaltung der Arbeit», стр. 48[1], Alinea 2; «Механика», стр. 195, 4) и я не могу здесь допустить какую-нибудь разницу между движением вращательным и поступательным. Если тело вращается относительно *неба неподвижных звезд*, то развиваются центробежные силы, а если оно вращается относительно какого-нибудь *другого* тела, а не относительно неба неподвижных звезд, то таких центробежных сил нет. Я ничего не имею против того, чтобы первое вращение называли *абсолютным*, если только не забывают, что это означает ничто иное, как *относительное* вращение относительно *неба неподвижных звезд*. Можем ли мы удержать неподвижным сосуд с водой Ньютона, заставить вращаться небо неподвижных звезд и тогда *доказать* отсутствие центробежных сил?

Опыт этот неосуществим, сама мысль о нем вообще не имеет никакого смысла, ибо *оба* случая чувственно не могут быть отличены друг от друга. Я считаю поэтому *оба* случая за *один и тот же случай* и различение Ньютона за иллюзию. («Механика», стр. 197, 5.)

Верно только то, что на воздушном шаре, окруженном со всех сторон туманом, все же можно еще ориентироваться при помощи тела, *не* вращающегося относительно неба неподвижных звезд. Но чем-либо другим, кроме посредственного ориентирования относительно неба неподвижных звезд, этого назвать нельзя; это механическое ориентирование вместо оптического.

Что касается критики Streinz'а моих взглядов, то мне остается заметить еще по этому поводу следующее. Мое мнение *не* следует смешивать со взглядом Эйлера (Streinz, стр. 7, 50), который, как это подробно доказал Ланге, вообще не дошел до определенного и ясного взгляда. Я *не* принимал, что *только* отдаленные, а не также близкие массы принимают участие в определении скорости тела (Streinz, стр. 7); я го-

[1]«Принцип сохранения работы», перевод Г. А. Котляра под редакцией профессора Н. А. Гезехуса.

ворю только о влиянии, *независимом* от расстояния. Streintz (стр. 50) утверждает, что я, не зная Ньютона и Эйлера, по истечении столь продолжительного времени все же пришел только к взглядам, которые разделяли уже эти исследователи, но которые должны были быть уже отвергнуты частью ими, частью другими исследователями. Но беспристрастный и внимательный читатель моих рассуждений («Механика», стр. 190–201) вряд ли с ним согласится. Но даже замечания мои от 1878 года, которые одни только были известны Streinz'у, не дают ему права на такой приговор; эти замечания по основательным причинам, правда, весьма кратки, но вовсе не настолько скудны, как они должны показаться человеку, который знает их только из критики Streinz'а. Точку зрения, на которую становится Streinz, я тогда уже отверг в самых ясных выражениях.

Что касается сочинения Ланге, то оно принадлежит, мне кажется, к лучшим сочинениям по этим вопросам. Очень симпатичен метод его. Тщательный анализ и историко-критическое исследование понятия движения дали, мне кажется, результаты прочной ценности. Представляется мне также большой заслугой ясное выдвижение и целесообразное *обозначение* принципа «частного определения», хотя сам принцип и применение его мне не представляются новыми. Принцип этот, собственно говоря, лежит уже в основе всякого измерения. Выбор единицы массы есть дело соглашения, измерительное число — результат исследования. *Всякий* естествоиспытатель, уяснивший себе, что ему нужно исследовать исключительно взаимную зависимость между явлениями, как я это формулировал уже давно (в 1865 и 1866 гг.), применяет этот принцип. Когда, например, («Механика», стр. 186 и след.) отрицательное обратное отношение взаимных ускорений двух тел определяется, как отношение масс, то это дело произвольного *соглашения*, ясно именно так обозначенное, но *результат исследования* есть то, что эти отношения *не зависят* от характера и порядка комбинаций тел. Я мог бы привести здесь немало аналогичных примеров из теории теплоты и учения об электричестве, как и из других областей.

Чтобы с самого же начала ввести выражение наиболее простое и наглядное, Ланге следующим образом формулирует закон инерции:

«Три материальные точки P_1, P_2, P_3 одновременно выбрасываются из одной и той же точки в пространстве и сейчас же предоставлены самим себе. Как только убедились, что они не лежат на одной прямой линии, каждую из них соединяют с *совершенно произвольной* четвертой

точкой в пространстве Q. Соединяющие линии, которые мы обозначаем соответственно буквами G_1, G_2, G_3 образуют вместе трехгранный угол. Если этот угол *сохраняет свою форму неизменно и неподвижно* и если точка P_1 движется всегда по ребру G_1, точка P_2 по ребру G_2 и точка P_3 по ребру G_3, то можно рассматривать эти ребра, как оси некоторой системы координат (системы инерции), по отношению к которой каждая дальнейшая предоставленная самой себе материальная точка движется по прямой линии. Пути, проходимые этими предоставленными самим себе точками в столь определенных направлениях, друг другу пропорциональны.»

Система координат, в отношении к которой три материальные точки двигаются по прямым линиям, есть, по мнению Ланге (при условии приведенных выше ограничений), дело простого *соглашения*. То, что в отношении к такой системе и четвертая, да и любая другая предоставленная самой себе материальная точка движется *по прямой линии* и что пути, пройденные различными точками, остаются друг другу пропорциональными, есть *результат исследования*.

Прежде всего мы не хотим отрицать того, что закон инерции можно отнести к такого рода системе координат времени и пространства и таким образом выразить. Правда, такое выражение закона менее пригодно для практического применения, чем формулировка Streinz'а, но зато оно заманчивее вследствие своих методологических преимуществ. Мне лично оно особенно симпатично, так как я много лет тому назад был занят аналогичными попытками, от которых сохранились не начатки, а остатки («Механика», стр. 198, 7). Я оставил эти попытки потому, что я пришел к убеждению, что при всех этих формах выражения (и то же самое можно сказать о выражениях Streinz'а и Ланге) только *кажется*, что обходится отнесение к небу неподвижных звезд и углу вращения Земли.

В действительности же мы тем, что приняли во внимание небо неподвижных звезд и вращение Земли, пришли к познанию закона инерции в современной его области применения, и *без этих основ нам и в голову не пришло бы* заняться такими попытками («Механика», стр. 197, 6). Изучение некоторых изолированных точек с полной абстракцией всего остального мира кажется мне недопустимым («Механика», стр. 195–198, 7).

Мне кажется *очень спорным*, двигалась ли бы (равномерно) четвертая, предоставленная самой себе, материальная точка относительно

«системы инерции» Ланге по прямой, если бы можно было рассматривать небо неподвижных звезд, как несуществующее или не неизмененное или даже как неизменное, но только не с достаточной точностью неизменное.

Самая естественная точка зрения чистого естествоиспытателя остается такой: рассматривать сначала закон инерции, как достаточное приближение, относить его пространственно к небу неподвижных звезд и временно к вращению Земли и поправок или развития наших знаний на этот счет ожидать от дальнейшего опыта, как это изложил я («Механика», стр. 201, 9).

11. Мне остается еще упомянуть о работах по вопросу о законе инерции, обнародованных с 1889 года. Прежде всего укажу на изложение К. Пирсона (K. Pearson. «Grammar of Science», 1892, стр. 477), которое, если оставить в стороне терминологию, совпадает с моим. B. и I. Friedländer («Absolute und relative Bewegung», Berlin, 1896) пытаются решить этот вопрос на опыте по схеме, приведенной мной на стр. 197, причем я только предупреждаю, что эта схема количественно окажется недостаточной. С рассуждениями Иоганнессона (Iohannesson. «Das Beharrungsgesetz», Berlin, 1896) я могу вполне согласиться, но все же остается не решенным вопрос, *как определяется* движение тела, *не* заметно ускоряемого другими телами. Полноты ради мы упомянем еще о преимущественно диалектических рассуждениях M. E. Vicaire («Société scientifique de Bruxelles», 1895) и об исследованиях I. G. MacGregor'a (Royal Society of Canada, 1895). Последние исследования находятся в более слабой связи с затронутым здесь вопросом. Против воззрения Budde на пространство, как на среду известного рода, я не могу ничего возразить (см. стр. 197), но я только полагаю, что свойства этой среды все же должны поддаваться физическому доказательству еще и иным образом, а не приниматься ad hoc. Если все (кажущиеся) действия на расстоянии, ускорения, оказываются достигнутыми через посредство какой-то среды, то вопрос вообще освещается другим светом и разрешение его следует, может быть, искать в точке зрения, изложенной на стр. 197.

12. Обсуждение вопросов о значении закона инерции носит в настоящее время характер гораздо более общий и более свободный от предрассудков, чем это было в то время, когда вышло в свет первое издание настоящей книги. Научно образованная публика с того времени существенным образом изменилась. По этой причина проблема могла

бы в настоящее время (1904) быть изложена *заново* могли бы быть опущены кое-какие элементы полемики, которые тогда были необходимы. Но я был заинтересован — и это весьма понятно — в том, чтобы оставить нетронутым старый текст, и потому позволю себе то, что я имею теперь сказать, прибавить в виде дополнения.

Взгляд, что «абсолютное движение» есть понятие бессмысленное, бессодержательное и научно никуда негодное, — взгляд, который двадцать лет тому назад вызывал почти всеобщее отчуждение, в настоящее время разделяется многими выдающимися исследователями. В качестве решительных «релятивистов» я мог бы назвать: Сталло, Дж. Томсона, Людвига Ланге, Лове, МакГрегора, Пирсона, Мансиона, Клейнпетера. Число релятивистов быстро растет и приведенный список наверное уже не полон. Можно надеяться, что скоро не будет уже ни одного выдающегося сторонника противоположного взгляда. Но если и без того малопонятные гипотезы абсолютного пространства и абсолютного времени не выдерживают более критики, то возникает вопрос: каким же образом мы можем придать закону инерции понятный смысл? В превосходной и ясно написанной статье («Philos. Magaz.», XXXVI, 1893, стр. 233) MacGregor показывает для этого два пути: 1 — историко-критический путь, сызнова подвергающий исследованию факты, на которых покоится закон инерции, изучающий пределы его применения и, может быть, дающий новую формулировку его; 2 — допущение, что закон инерции в старой своей форме достаточно знакомит с движениями и выводом правильной системы координат *из* этих движений.

Примером первого метода является *мое*, данное здесь, изложение. В нем же содержится уже указание на ставшее необходимым видоизменение выражения расширением данных опыта. Второй путь *психологически*, разумеется, представляется всего ближе уже ввиду того великого доверия, которым пользуется механика, как точнейшая из естественных наук. И действительно, именно этим путем с большим или меньшим успехом часто шли исследователи и я сам шел им прежде, чем я стал думать, что следует предпочесть другой. У. Томсон и Тэт («Treatise on Natural Philosophy», часть 1, Т. 1, 1879, § 249) замечают, что две одновременно выброшенные из одного и того же места и затем предоставленные самим себе материальные точки двигаются так, что соединяющая их линия остается параллельной самой себе. Если поэтому четыре точки O, P, Q, R одновременно выбрасываются из одного и того же места и затем не подвергаются более действию какой-нибудь силы,

то соединяющие их линии OP, OQ, OR дают всегда *определенные* направления. Дж. Томсон пытается в двух статьях (Proceed. R. S. E., 1884, стр. 568 и 730) конструировать систему координат, соответствующую закону инерции, и при этом признает уже, что допущения относительно одинаковости и прямолинейности движения представляют собою *отчасти дело соглашения.* Под влиянием Дж. Томсона и Тэт (Ibid, стр. 743) принимает участие в разрешении той же задачи при посредстве кватернионов. На том же пути мы находим и MacGregor'а в его «Presidential Adress» (Transact. R. S. of Canada, Vol. X, 1892, Sect. III, в особенности стр. 5 и 6).

Те же психологические мотивы действовали, вероятно, и у Людвига Ланге, которому всего больше посчастливилось, и еще в 1885 году, дать *правильное толкование* закону инерции Ньютона (см. его две статьи в журнале Вундта Phil. Studien, 1885). Во второй статье Ланге показывает, что и относительно *одной* произвольно и даже криволинейно движущейся точки P_1 можно систему координат двигать так, чтобы эта точка описывала в ней предназначенную ей определенную прямую G_1. Если сюда присоединяется еще *вторая* произвольно движущаяся точка P_2, то все еще можно двигать эту систему так, чтобы точка P_2 описывала прямую G_2, в общем косую относительно прямой G_1, если только кратчайшее расстояние G_1G_2 не превышает кратчайшего расстояния, которое когда-либо может быть между точками P_1 и P_2. Система координат все еще может вращаться около P_1, P_2. Если выбрать еще третью прямую G_3 так, чтобы все треугольники $P_1P_2P_3$, которые могут образоваться присоединением третьей произвольно движущейся точки P_3, могли быть представлены через точки на прямых G_1, G_2, G_3, то и точка P_3 будет двигаться по прямой G_3. Таким образом, *максимум* для трех точек система координат, в которой эти точки могут двигаться по прямой линии, есть *дело одного соглашения.* И вот существенное содержание закона инерции Ланге видит в том, что при помощи трех предоставленных самим себе материальных точек может быть найдена система координат, относительно которой *четыре и произвольное множество* предоставленных самим себе точек двигаются в прямом направлении, описывая пропорциональные друг другу расстояния. Таким образом, случай, данный в природе, был бы только *упрощением и ограничением* кинематически возможного многообразия. Это исследование весьма симпатично, ибо каждое открытие какой-нибудь закономерности означает всегда ограничение мыслимых возможностей.

Это следует прибавить в объяснение упомянутой выше формулировки Ланге. Клейнпетер, стоящий на несколько иной точке зрения («Archiv, f. system Philos.», VI, 1900, стр. 461), обозначает содержание закона инерции следующими словами: «можно определить систему координат и нормальное движение, в отношении которых все тела двигаются прямолинейно и равномерно, уклонение коих от этой нормы не может быть определено однозначным образом, согласующимся со всеми остальными нашими физическими допущениями».

Недавно Ланге обнародовал критическую статью (Wundt's, «Philos. Studien», XX, 1902), в которой он между прочим излагает, *как* можно было бы, согласно его принципам, получить *новую* систему координат, если бы обычное грубое отнесение к небу неподвижных звезд оказалось недостаточным более вследствие более точных астрономических наблюдений. Что касается *теоретической* формальной ценности выражения Ланге, а именно что в настоящее время небо неподвижных звезд является единственно пригодной *практической* системой координат, как и относительно метода — при помощи постепенных поправок получить новую систему, между мной и Ланге нет различия во мнениях. Различие, которое еще остается и которое, вероятно, сохранится, обуславливается тем, что Ланге подошел к вопросу как *математик*, между тем как я обратил внимание на *физическую* его сторону.

Ланге с известной долей уверенности предполагает, что *его* выражение окажется правильным и при довольно значительных движениях на небе. Я этой уверенности разделять не могу. Мне среда, в которой мы живем, с ее почти постоянными углами направлений относительно звезд, кажется чрезвычайно специальным случаем и я не осмелюсь от этого случая умозаключать к другому, сильно от него отличающегося. Хотя и я ожидаю, что астрономические наблюдения сделают необходимыми сначала лишь очень незначительные поправки, я все же считаю возможным, что закон инерции в его простой форме, которую придал ему Ньютон, для нас людей имеет лишь местное и временное значение. Позволим себе еще иную, более свободную точку зрения. Мы измеряем наше время по углу вращения Земли, но мы могли бы его в такой же мере измерять по углу вращения какой-нибудь другой планеты. Но из-за одного этого мы не станем же думать, что во *временном* течении всех физических явлений сейчас же должны были бы произойти нарушения, как только произошло бы какое-нибудь случайное и внезапное изменение в угловой скорости Земли или отдаленной планеты. Мы не считаем

существующую здесь зависимость *непосредственной* и, следовательно, временная ориентировка является для нас ориентировкой *внешней*. Таким же образом никто же не станет думать, что в системе свободных от всякого воздействия, предоставленных самим себе и движущихся в прямолинейном и равномерном движении тел, случайное нарушение, хотя бы вследствие какого-нибудь столкновения, в *одном* теле, от которого тоже зависит определение системы координат, сейчас же должно сопровождаться нарушением во всех остальных телах. И здесь ориентировка чисто внешняя. Как мы ни должны быть благодарны за эту ориентировку и именно, если она очищена от бессмысленности, естествоиспытатель все же чувствует потребность в более широкой точке зрения, в познании *непосредственных* связей, например, связей масс вселенной. В качестве идеала он мечтал бы о принципиальной точке зрения, из которой *равным* образом вытекали бы и ускоренные движения и движения по инерции. Образцом здесь мог бы служить прогресс от открытия Кеплера к закону тяготения Ньютона и стремление перейти от этого последнего к физическому пониманию в этом роде электрического действия на расстояния. Мы должны даже считаться с той мыслью, что массы, которые мы видим и относительно которых мы случайно ориентируемся, может быть, вовсе не имеют решающего значения. Поэтому не следует также слишком низко оценивать такие экспериментальные идеи, как идеи господ Фридлендер, хотя от них и не виден еще непосредственный успех. Если исследователь с радостью хватается за то, что сейчас же достижимо, то ему, без сомнения, не повредит все же, если он порой будет обращать свой взор в глубь неисследованного еще.

В то время, как печаталось настоящее издание книги, я нашел в недавно обнародованном юбилейном сборнике в честь Больцманна новое сообщение К. Нейманна «Ueber die sogenannte absolute Bewegung» («О так называемом абсолютном движении»). В нем между прочим содержится следующее положение: «Так как все движения должны быть отнесены к система альфа (системе инерции), то она представляет, очевидно, известную непрямую связь между всеми происходящими во вселенной процессами и содержит в себе, следовательно — можно сказать — столь же загадочный, как и сложный универсальный закон». Я думаю, что с этим всякий согласится; это ясно выражается также и в том, что выше ориентировка не называется непосредственной. Если же Нейманн чувствует потребность в астрономическом опреде-

лении альфа, то он вступает на путь, который MacGregor обозначил, как второй, и который избрал также Ланге. Я полагаю однако, что естествоиспытатель всегда еще будет стремиться к замене посредственной связи непосредственной. Далее предо мной лежит свежо, ясно и очень популярно написанное сочинение Гофманна «Движение и инерция» (W. Hofmann, «Bewegung und Trägheit», Wien, 1904). Автору неизвестны, по-видимому, существующие здесь разногласия, и он ищет разрешение вопроса почти теми же путями, которыми я шел в свое время. Так, снова вскрылась движущая сила, скрывающаяся в этом вопросе. Французские авторы по вопросам механики предпочитают подальше держаться от подобного рода обременяющих вопросов, строго различая физическую и рациональную механики. Первая тогда дает экспериментальные точки опоры для идеализированных предпосылок второй, логические последствия которой остаются, конечно, неприкосновенными, покуда сохраняются те допущения. Но так как главный интерес механики лежит в ее применимости, то необходимо, без сомнения, по мере развития теории подвергать под ее влиянием пересмотру основные факты физической механики. Если строго охранять проведенную границу, то это приводит к опасности застоя в обеих областях. Всякая область естествознания нуждается в непрерывном взаимодействии теории и эксперимента. Ср. прекрасное сочинение P. Mansion'a «Sur les principes fondamentaux de la géométrie de la mecanique et de l'astronomie» («Основные принципы геометрии, механики и астрономии»). Автор, впрочем, как и мы, считает абсолютное движение делом бессмысленным и птоломееву и коперникову системы кинематически равноценными. Смена обсуждающих какой-нибудь вопрос лиц имеет весьма существенное значение для выяснения и разрешения этого вопроса и освещает различные его стороны. (См. приложение, добавление 6.)

7. Обзор и критика положений Ньютона

1. Достаточно обсудив подробности положений Ньютона, мы можем теперь еще раз обозреть форму и порядок их. Ньютон дает сначала несколько определений и только за ними следуют у него законы движения. Рассмотрим сначала эти определения.

Определение 1. Количество материи измеряется совместно ее плотностью и ее объемом. Это количество материи я в последующем

буду понимать под названием тела или массы и оно выражается в весе данного здесь тела. Что масса тела пропорциональна его весу, я нашел при помощи весьма точных опытов с маятником, что будет показано ниже.

Определение 2. Величина движения измеряется совместно скоростью и количеством материи.

Определение 3. Материя обладает способностью сопротивления, поэтому всякое тело сохраняет, насколько это для него возможно, свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Определение 4. Приложенная сила есть действующее на тело стремление изменить его состояние, состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Определение 5. Действие центростремительной силы выражается в том, что тело притягивается к какой-нибудь точке как к центру, или отталкивается от нее, или каким-либо образом стремится достичь ее.

Определение 6. Абсолютная величина центростремительной силы есть большая или меньшая мера ее в зависимости от действующей причины, которая распространяется от центра к периферии.

Определение 7. Величина ускорительной центростремительной силы пропорциональна скорости, которую она вызывает в течение определенного времени.

Определение 8. Величина движущей центростремительной силы пропорциональна величине движения, которую она вызывает в течение определенного времени.

Краткости ради можно эту троякого рода величину силы называть абсолютной, ускорительной и движущей силой и для различения их относить к телам, стремящимся к центру, к месту тел и к центру сил. Движущую силу можно относить к телу, как стремление целого к центру, как суммарный результат стремления к центру отдельных частей. Ускорительную силу можно относить к месту тела, как действующую причину, которая распространяется от центра к отдельным окружающим его местам, к движению находящегося в них тела. Абсолютную

силу можно относить к центру, одаренному причиной, без которой движущие силы не распространялись бы в пространстве. Причина этого может быть каким-либо центральным телом (подобно магниту в центре магнитной силы или Земля — в центре силы тяжести) или чем-либо невидимым. Таково, по крайней мере, математическое понятие ее, ибо физические причины и центры сил я здесь оставлю без внимания.

Ускорительная сила относится поэтому к движущейся, как скорость к величине движения. Величина движения получается произведением скорости на массу, а движущая сила — произведением ускорительной силы на ту же массу, ибо сумма действий, которые вызывает ускорительная сила в отдельных частях тела, и есть движущая сила всего тела. Вот почему близ поверхности Земли, где ускорительная сила, т.е. сила тяжести остается во всех телах одной и той же, движущая сила тяжести или вес тела есть то же, что и тело. Но если подняться в такие местности, в которых ускорительная сила тяжести становится меньше, то вес равномерно уменьшается и остается всегда пропорциональным произведению из ускорительной силы тяжести на тело. Так, в местностях, где ускорительная сила вдвое меньше, вес тела тоже вдвое меньше. Далее я называю притяжение и удар в том же смысле ускорительными и движущими. Обозначения: притяжение, удар или стремление к центру я употребляю без всяких различий, рассматривая эти силы не в физическом, а только в математическом смысле. Читатель не должен поэтому из замечаний этого рода заключить, что я объясняю род и способ действия или физическую причину или что я приписываю центрам (представляющим лишь геометрические точки) действительные и физические силы, когда я говорю: центры притягивают или в центрах действуют силы.

2. Как мы подробно доказали уже выше, определение 1 есть лишь мнимое определение. Понятие массы не становится яснее, если рассматривать массу, как произведение объема на плотность тела, ибо сама плотность есть лишь масса в единице объема. Истинное определение массы может быть выведено только из динамических отношений тел.

Против определения 2, представляющего лишь простое численное выражение, ничего возразить нельзя. Определение 3 (об инерции) становится излишним ввиду определений 4–8, ибо в ускорительной природе сил дана уже и инерция.

Определение 4 изображает силу, как причину ускорения или стремление к ускорению тела. Последнее подтверждается тем, что и в том

случае, когда ускорений быть не может, наступают другие соответствующие им изменения, как давление, растяжение тел и т. д. Причина ускорения в направлении к определенному центру объявляется в определении 5 центростремительной силой, а в определениях 6, 7 и 8 различается, как абсолютная, ускорительная и движущая сила. Дело, конечно, вкуса и формы выражать ли понятие силы в одном или нескольких определениях. Принципиально против определений Ньютона ничего возразить нельзя.

За определениями следуют аксиомы или законы движения. Ньютон устанавливает три таких закона:

«1 закон. Каждое тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если оно не бывает вынуждено действующими на него силами изменить это состояние».

«2 закон. Изменение движения пропорционально воздействию движущей силы и происходит в направлении той прямой линии, в которой эта сила действует».

«3 закон. Действие всегда равно противодействию, или действия двух тел друг на друга всегда равны и противоположным образом направлены».

За этими тремя законами у Ньютона следует несколько добавлений. 1 и 2 добавления относятся к принципу параллелограмма сил, 3 добавление касается количества движения, произведенного противодействием, 4 добавление — неизменяемости центра противодействием, а 5 и 6 добавления касаются относительного движения.

3. Нетрудно заметить, что 1 и 2 законы даны уже в предыдущих определениях силы. Согласно этим определениям, без силы нет и ускорения, а следовательно, есть только покой или прямолинейное равномерное движение. Далее представляет собой совершенно ненужную тавтологию, после того как ускорение определено, как мера силы, еще раз сказать, что изменение движения пропорционально силе. Было бы достаточно сказать, что предпосланные определения не являются произвольными математическими определениями, а соответствуют свойствам тел, данным в опыте. В 2 законе содержится как будто нечто новое. Но мы видели уже, что без правильного понятия массы он не понятен, а с этим понятием, которое само может быть получено только из динамического опыта, не нужен.

В добавлении 1, действительно, содержится нечто новое. Но в нем ускорения, обусловленные в теле K различными телами M, N, P, рас-

сматриваются, как *само собою разумеется*, независимые друг от друга, между тем как именно это следовало бы вполне ясно признать *фактом опыта.* Добавление 2 есть простое применение закона, выраженного в добавлении 1. Остальные добавления тоже оказываются простыми дедуктивными (математическими) результатами из предшествующих понятий и законов.

4. Если даже оставаться *всецело* на точке зрения Ньютона и совершенно оставить без внимания упомянутые усложнения и неопределенности, которые сокращенным обозначением «время» и «пространство» не устраняются, а только прикрываются, то все еще можно заменить положения Ньютона гораздо более простыми, методически более упорядоченными и удовлетворительными. По нашему мнению, они могли бы быть таковы:

a. Опытный принцип. Противопоставленные друг другу тела вызывают друг у друга при известных, определенных в экспериментальной физике, условиях противоположные *ускорения* в направлении соединяющей их линии. (Принцип инерции здесь уже включен).

b. Определение. Отношение масс двух тел есть отрицательное обратное отношение их взаимных ускорений.

c. Опытный принцип. Отношения масс не зависят от рода физических состояний тел (будь то электрические, магнитные и т. д. состояния), обусловливающих взаимное их ускорение; они остаются также одними и теми же, безразлично, получены ли они посредственно или непосредственно.

d. Опытный принцип. Ускорения, которые вызывают несколько тел A, B, C ... в каком-нибудь теле K, друг от друга не зависят. (Отсюда непосредственно вытекает принцип параллелограмма сил.)

e. Определение. Движущая сила есть произведение величины массы какого-нибудь тела на вызванное в нем ускорение.

Затем могли бы еще следовать остальные произвольные определения численных выражений «величина движения», «живая сила» и т. д., но они вовсе не необходимы. Приведенные положения удовлетворяют требованию простоты и экономии, которые можно предъявить к ним из соображений экономически-научных. Они также прозрачны и ясны, ибо ни относительно одного из них не может возникнуть сомнения, что оно означает, каков его источник, выражает ли оно факт опыта или произвольное определение.

5. В общем и целом можно сказать, что Ньютон превосходно су-

мел отыскать понятия и принципы, которые были *достаточно надежны*, чтобы можно было на них строить дальше. Отчасти, по-видимому, вследствие трудности и новизны дела он вынужден был изложить его своим современникам более пространно и потому недостаточно цельно. Это привело, например, к тому, что одно и то же свойство механических процессов бывает у него порой формулировано несколько раз. Но отчасти ему самому, как это можно доказать, не были ясны ни значение, ни, в особенности, источник познания его принципов. И это не может бросить ни малейшей тени на духовное его величие. Тот, кому приходится установить новую точку зрения, не может, конечно, владеть ею с самого же начала с такой уверенностью, с которой ею владеют те, кому эта точка зрения досталась от него без всякого труда. Он достаточно уже сделал, когда открыл истины, на которых можно строить дальше. Ибо каждое новое следствие представляет вместе с тем новое познание, новый контроль, расширение кругозора, выяснение точки зрения. Ни полководец, ни великий исследователь не могут относительно каждого достигнутого пункта заняться мелочными исследованиями, на каком основании они этим пунктом владеют. Величие предстоящей задачи не оставляет для этого времени. Впоследствии дело меняется. От двух последующих столетий Ньютон мог ожидать, что они займутся дальнейшим исследованием и укреплением основ того, что было создано им. И действительно, в эпоху большего научного покоя принципы могут получить более высокий философский интерес, чем все, что на них можно строить. Затем возникают вопросы, подобные тем, которые мы здесь обсуждали. Может быть, мы здесь внесли кое-что в дело их разрешения. Мы вполне сходимся с знаменитым и не без основания высоко почитаемым физиком У. Томсоном (лордом Кельвином) в преклонении и уважении перед Ньютоном. Но нам очень трудно понять тот взгляд его, что положения Ньютона предоставляют и в настоящее время еще самое лучшее и самое философское, что у нас имеется.

8. Взгляд назад на развитие динамики

1. Осматриваясь назад на период развития динамики, начатый Галилеем, продолженный Гюйгенсом и законченный Ньютоном, мы находим в качестве главного результата познания то, что тела взаимно определяют друг в друге зависимые от пространственных и материальных условий *ускорения* и что существуют *массы*. То, что познание

этих фактов выражено в столь многих положениях, имеет исключительно историческое основание: оно было получено не сразу, а постепенно. В сущности говоря, был установлен только *один* факт. Различные пары тел определяют независимо друг от друга в себе самих пары ускорений, члены которых представляют отношение неизменное и характерное для каждой пары тел. Даже такие выдающиеся люди, как Галилей, Гюйгенс и Ньютон, не смогли усмотреть этот факт сразу, а познавали его только частями, как это выразилось в законе падения тел, в специальном законе инерции, в принципе параллелограмма сил, в понятии массы и т. д. В настоящее время нет более никакой трудности рассмотреть *единство* всего факта. Только практическая потребность сообщения может оправдать частичное выражение его при помощи многих принципов (число которых определяется собственно только научным вкусом). Впрочем, если мы вспомним наши рассуждения насчет понятий времени, инерции и т. д., мы укрепимся, без сомнения, в убеждении, что, строго говоря, даже и в настоящее время *весь* этот факт не познан еще вполне со всех сторон.

С «неизвестными причинами» процессов природы полученная точка зрения не имеет ничего общего (на что ясно указывает Ньютон). То, что мы в настоящее время называем в механике *силой*, не есть нечто, скрытое в процессах, а поддающееся измерению, фактическое условие движения, произведение из массы на ускорение. Также когда мы говорим о притяжении и отталкивании тел, нам нет вовсе надобности думать о каких-либо скрытых причинах движения. Выражением «притяжение» обозначают только *фактическое сходство*, определенного условиями движения, процесса с эффектом волевого импульса. В обоих случаях наступает или действительное движение, или, если это последнее компенсируется другим условием движения, перемещение, сжатие тел и т. д.

2. Настоящее дело гения заключалось в том, чтобы усмотреть связь между известными определяющими моментами механических процессов. Более точное установление формы этой связи было делом осторожной и осмотрительной работы, завершившейся установлением различных понятий и принципов механики. Истинное значение, истинную ценность этих принципов и понятий можно установить только исследованием их исторического происхождения. И вот это исследование с несомненностью доказывает порой, что какие-нибудь случайные обстоятельства дали процессу развития своеобразное направление, которое

при других условиях могло бы оказаться весьма различным. Поясним это на примере.

Прежде чем он принял известную зависимость между конечной скоростью и временем падения тел и проверил эту зависимость на опыте, Галилей, как мы уже упоминали, сделал другое допущение, а именно, что конечная скорость пропорциональна пройденному падающим телом расстоянию. Вследствие тоже упомянутых уже ложных заключений он полагал, что это допущение противоречит самому себе. Он полагал, что двойное расстояние, пройденное телом в своем падении, благодаря двойной конечной скорости, должно быть пройдено в то же время, что и однократное расстояние. Так как однако первая половина этого двойного расстояния должна была быть пройдена раньше, то вторая половина должна была быть пройдена мгновенно (без измеримого времени). Отсюда легко следовало, будто движение падающего тела есть вообще движение мгновенное.

Сделанные здесь ложные заключения очевидны. Интеграции в уме, естественно, были делом непривычным для Галилея и за отсутствием всякого метода он не мог не ошибаться, как только условия становились несколько сложнее. Если s означает путь и t время, то допущение Галилея на нашем современном языке выражается так: $\frac{ds}{dt} = as$, откуда следует, что $s = A\exp(at)$, где at есть постоянная величина эмпирическая и A — постоянная величина интегрирования. Это совсем другой вывод, чем тот, который сделал Галилей. Он, правда, не соответствует опыту и Галилей усомнился бы, вероятно, в том, что для $t = 0$ путь s все же должен быть отличен от 0, чтобы вообще могло наступить движение. Но самому себе допущение это не противоречит.

Представим себе, что этот же вопрос поставил себе Кеплер. Между тем как Галилей обращался всегда только к простейшему и отбрасывал сейчас же сделанное допущение, раз оно только оказывалось непригодным, Кеплер обнаруживает совершенно другой характер. Он не останавливается перед самыми сложными допущениями и достигает цели, не переставая постепенно изменять их, что достаточно доказывает история открытия им законов движения планет. Таким образом, если бы допущение $\frac{ds}{dt} = as$ оказалось непригодным, Кеплер, вероятно, испробовал бы множество других и среди них, вероятно, также и правильное допущение $\frac{ds}{dt} = a\sqrt{s}$. Но тогда ход развития динамики оказался бы существенно иным.

По нашему мнению, именно этому ничтожному историческому обстоятельству следует приписать то, что понятие работы с таким трудом, столь постепенно приобрело современное свое значение. В самом деле, вследствие того, что зависимость между скоростью и временем была случайно найдена раньше, отношение $v = gt$ должно было показаться первоначальным уравнением, $s = \frac{gt^2}{2}$ ближайшим и уравнение $gs = \frac{v^2}{2}$ более отдаленным следствием. С введением понятия массы (m) и силы (p), причем $p = mg$, получают (перемножением трех уравнений с m) $mv = p \cdot t$, $ms = \frac{pt^2}{2}$, $ps = \frac{mv^2}{2}$, т.е. основные уравнения механики. Таким образом, понятия *силы и количества движения* (mv) должны были казаться первоначальнее, чем понятия *работы* (ps) и *живой силы* mv^2. Нет поэтому ничего удивительного в том, что везде, где появлялось понятие работы, делались попытки заменить его понятиями исторически более старыми. В этом именно находит полное свое объяснение весь спор между последователями *Лейбница* и *Декарта*, до некоторой степени разрешенный лишь д'Аламбером.

Если быть беспристрастным, нельзя не заметить, что мы имеем точно то же право спрашивать о зависимости между конечной скоростью и временем, как и о зависимости между конечной скоростью и пройденным расстоянием, и разрешить вопрос при посредстве опыта. Первый вопрос приводит к следующему опытному принципу: данные противопоставленные друг другу тела сообщают друг другу в данные времена определенные приращения скорости. Второй вопрос учит нас следующему: данные противопоставленные друг другу тела сообщают друг другу при определенных взаимных перемещениях известные приращения скорости. Оба положения равно правильны и могут считаться равно первоначальными.

Что это правильно, доказывает в наше время И. Р. Майер, свободный от влияния школы, современная натура в духе Галилея, который на самом деле пошел самостоятельно этим последним путем и тем достиг такого расширения науки, какое путем школы было получено лишь позже с большим трудом и с неравной полнотой. Для Майера «работа» есть понятие первоначальное. То, что в школе механики называется работой, он называет силой. Майер ошибается только в том, что он свой путь считает единственно правильным.

3. Итак, можно по произволу считать элементом, *определяющим*

скорость, или *время*, или *путь падения.* Если внимание обращается на первое условие, то понятие силы представляется первоначальным, а понятие работы — понятием выведенным. Если же сначала исследуют влияние второго условия, то понятие работы является первоначальным. Перенося понятия, полученные рассмотрением движения падающего тела, на более сложные условия, мы познаем силу, как элемент, зависимый от расстояния тел, как функцию расстояния $f(r)$. Работа на пути dr есть тогда $f(r)dr$. На втором пути исследования работа тоже оказывается функцией расстояния $F(r)$, но силу мы тогда знаем только в форме $\frac{dF(r)}{dr}$, как предельную величину отношения: $\frac{\text{приращение работы}}{\text{приращение пути}}$.

Галилей преимущественно шел первым из обоих путей. Предпочитал его и Ньютон. Гюйгенс предпочитает более второй путь, но тоже им не ограничивается. Декарт опять по-своему переработал идеи Галилея. Но его работы имеют мало значения сравнительно с работами Ньютона и Гюйгенса и влияние его скоро совершенно ослабевает. После Гюйгенса и Ньютона смешение обеих точек зрения, независимость и равнозначность которых не всегда принимается во внимание, приводит к самой многообразной сумятице, примером коей может служить упомянутый выше спор между последователями *Декарта* и *Лейбница* о мере силы. Но до новейшего времени исследователи продолжают предпочитать то одну, то другую точку зрения. Так, идеи Галилея–Ньютона преимущественно культивируются школой Пуансо, а идеи Галилея–Гюйгенса школой Понселе.

4. Ньютон оперирует почти исключительно понятиями силы, массы, количества движения. То, что он чувствует всю ценность понятия массы, ставит его выше его предшественников и современников. Галилею и в голову не приходило, что масса и вес суть вещи различные. И Гюйгенс во всех своих рассуждениях говорит о весе вместо того, чтобы говорить о массе, примером чего могут служить его исследования о центре колебания. И в своем сочинении «De percussione» («Об ударе») Гюйгенс всегда говорит ««corpus majus» (большее тело) и «corpus minus» (меньшее тело), имея в виду большую или меньшую массу. К образованию понятия массы пришли лишь тогда, когда заметили, что *одно и то же тело* может испытывать от силы тяжести различные ускорения. Повод к этому дали сначала наблюдения над маятником Richer (1671–1673), из которых Гюйгенс сейчас же сделал правильные выводы,

и применение законов динамики к небесным телам. Важность первого пункта очевидна из того, что при помощи собственных наблюдений над маятниками, сделанными из различного материала, Ньютон доказал пропорциональность между массой и весом в одном и том же месте земного шара («Principia», Sect VI de motu et resistentia corporum funependulorum). И у Иоганна Бернулли первое различение между массой и весом в его книге «Meditatio de natura centri oscilltaionis» («Размышление о природе центра колебания») (Opera omnia, Lausannae et Genevae, T. II, стр. 168) устанавливается замечанием, что одно и то же тело может получать различные ускорения тяжести. Вопросы же динамики, касающиеся многих находящихся в известной связи тел, Ньютон решает при помощи понятия силы, массы, величины движения.

5. Гюйгенс выбрал другой путь для решения тех же проблем. Галилей уже установил, что благодаря достигнутой скорости падения тело поднимается столь же высоко, на сколько оно упало. В своей книге «Horologium oscillatorium» Гюйгенс обобщает это положение, говоря, что центр тяжести системы тел, благодаря достигнутой им скорости падения, поднимается столь же высоко, насколько низко он упал. Этим он приходит к принципу эквивалентности работы и живой силы. Названия для его численных выражений были, правда, придуманы лишь гораздо позже.

Этот принцип работы Гюйгенса был встречен почти всеми его современниками с недоверием. Удовольствовались тем, что стали пользоваться блестящими результатами; к замене его выводов другими делались постоянные попытки. И после того как принцип этот был расширен Иоганном и Даниелем Бернулли, в нем всегда ценили больше плодотворность, чем очевидность.

Мы видим, что принципы Галилея–Ньютона, благодаря большей своей простоте и большей как будто бы очевидности, предпочитаются принципам Галилея–Гюйгенса. Пользоваться последними вообще заставляет необходимость в тех случаях, в которых применение первых становится невозможным вследствие слишком затруднительного детального рассмотрения, как, например, в теории движения жидкостей у Иоганна и Даниеля Бернулли.

Но если мы присмотримся поближе, нельзя не заметить, что принцип Гюйгенса обладает той же простотой и очевидностью, как и упомянутые выше принципы Ньютона. Что скорость (в случае одного тела) определяется *временем* падения или что она определяется *расстоянием*,

пройденным телом в своем падении — представляет собой допущения равно простые и естественные. И в том и в другом случае *форма* закона должна быть дана в *данных опыта.* Уравнения $pt = mv$ и $ps = \frac{mv^2}{2}$ представляют собой, следовательно, одинаково хорошие исходные пункты.

6. Когда же мы переходим к исследованию движения многих тел, мы в обоих случаях вынуждены сделать дальнейший шаг вперед равной степени достоверности. Понятие массы Ньютона подтверждается тем, что с отказом от него прекращается всякая правильность процессов, мы сейчас же должны ожидать противоречий против самых привычных нам и грубейших данных опыта и сама физиология окружающей нас механической среды становится непонятной. То же самое мы должны заметить относительно принципа работы Гюйгенса. Если мы отказываемся от положения $\sum ps = \frac{\sum mv^2}{2}$, то тяжелые тела могут собственным своим весом подниматься выше и все известные правила процессов механики теряют свое значение. На *инстинктивном* моменте, оказавшем свое влияние при отыскании *общих* точек зрения, мы уже останавливались выше подробно.

Само собой разумеется, что и тот, и другой приведенный выше круг идей мог бы развиться и гораздо более независимо друг от друга. Так как они постоянно соприкасались между собою, то нет ничего удивительного в том, что они отчасти и переходили один в другой и что круг идей Гюйгенса представляется менее замкнутым, менее завершенным. С понятиями силы, массы, величины движения круг идей Ньютона вполне завершен. С понятиями работы, массы и живой силы и круг идей Гюйгенса был бы завершен. Но он не имел еще совершенного понятия массы и потому это последнее приходилось при дальнейших применениях заимствовать из второго круга идей. А между тем это могло бы быть избегнуто. Если у Ньютона отношение масс двух тел могло быть определено через обратное отношение вызванных одной и той же силой скоростей, то у Гюйгенса оно могло бы быть вполне последовательно определено через обратное отношение произведенных одной и той же работой квадратов скоростей.

В обоих кругах идей рассматривается зависимость совершенно различных моментов *одного и того же* явления. Точка зрения Ньютона полнее постольку, поскольку она решает вопрос относительно движения всякой массы; но зато ей приходится очень уж входить в подробности.

Точка зрения Гюйгенса дает правило для всей системы. Она удобна только, но тогда очень удобна, когда *отношения скоростей* масс и без того уже известны.

7. На основании изложенного мы можем сказать, что в развитии динамики вполне так, как в развитии статики, в различные эпохи внимание исследователей привлекала связь весьма различных признаков процессов механики. Можно рассматривать количество движения какой-нибудь системы определенными силами, но можно также рассматривать живую силу, как элемент, определенный работой. При выборе соответствующего признака играет большую роль индивидуальность исследователей. После приведенных рассуждений мы должны считать возможным, что система понятий механики была бы, может быть, другая, если бы Кеплер приступил к исследованиям движения падающего тела или если бы Галилей не совершил никакой ошибки в первых своих рассуждениях. Мы сейчас же заметим, что для исторического понимания науки важно не только знание идей, воспринятых и развитых далее последователями, но порой могут быть весьма важны и весьма поучительны и мимолетные соображения исследователей и даже как будто совершенно ошибочные их мнения. Для того чтобы накопленные принципы какой-нибудь науки не превратились постепенно в систему полупонятных рецептов или даже в систему *предрассудков*, чрезвычайно необходимо историческое исследование хода ее развития. Это историческое исследование не только содействует пониманию существующего, но показывает также возможность нового, доказывая, что существующее отчасти дело *условное и случайное*. Становясь на высшую точку зрения, к которой можно прийти различными путями, получаем более свободный кругозор и тогда становится возможным познание новых путей. (См. приложение, добавление 7.)

Во всех разобранных нами положениях динамики играет выдающуюся роль *скорость*. Согласно нашим рассуждениям, это объясняется тем, что, строго говоря, каждое тело находится в известной связи со всеми остальными, что одно тело или даже много тел не могут быть рассматриваемы совершенно изолированно. Только наша неспособность все обозреть *сразу* заставляет нас рассматривать немного тел и от остальных временно в том или другом отношении *отвлечься*, что и происходит введением скорости, в которой содержится уже время. Нет ничего невозможного в том, что место *элементарных законов*, составляющих содержание современной механики, когда-нибудь займут

(употребляя выражение К. Нейманна) законы интегральные, что мы непосредственно будем познавать взаимную зависимость *положений* тел. В этом случае *понятие силы* стало бы излишним.

9. Механика Герца

1. Предыдущий раздел 8 написан был в 1883 году. В нем, а именно в параграфе 7, мы набросали, правда, весьма общую, программу будущей механики, и не трудно заметить, что обнародованная в 1894 году механика Герца[1] представляет весьма существенный шаг вперед в указанном направлении. Невозможно дать правильное представление о всем богатстве содержания названной книги в тех немногих строках, которыми мы вынуждены здесь ограничиться. Наша задача не изложение новой системы механики, а изображение хода развития взглядов в области механики. Человек, интересующийся механикой, должен прочесть самую книгу Герца.

2. Герц предпосылает изложению своего учения критику изучения механики его предшественниками, в которой содержатся весьма важные критико-познавательные замечания. Следуя нашей точке зрения, не совпадающей ни с взглядом Канта, ни с атомистически-механическим воззрением большинства физиков, мы должны несколько видоизменить эти замечания. «Образы» (или, может быть, лучше — понятия), которые мы сами создаем себе о вещах, мы должны выбирать так, чтобы «логически необходимые последствия» их соответствовали «естественно необходимым последствиям» вещей. От этих образов требуется, чтобы они были логически допустимы, т. е. свободны от противоречий, далее правильны, т. е. соответствовали бы отношениям между вещами, и, наконец, целесообразны, т. е. содержали бы возможно меньше излишнего. Наши понятия действительно *создаются нами самими*, но отсюда еще не следует, что мы создаем их совершенно *произвольно*, а они представляют собою результат нашего *стремления к приспособлению* к окружающей нас чувственной среде. Согласие понятий между собой есть требование логически необходимое и эта логическая необходимость есть также *единственная*, которую *мы* знаем. Вера в естественную необходимость возникает лишь там, где наши понятия достаточно приспособлены к природе для того, чтобы логические наши вы-

[1] H. Herz. «Die Principien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt». Leipzig, 1894.

воды и факты природы не оказались друг с другом в противоречии. Но допущение достаточного приспособления наших понятий может быть во всякий момент опровергнуто опытом. Требование целесообразности у Герца вполне совпадает с нашим требованием экономии.

Что касается упрека в недостатке ясности, который Герц делает механике Галилея–Ньютона и в особенности понятие силы (см. стр. 7, 14, 15), то он нам кажется основательным лишь по отношению к тем логически небезупречным изложениям этой системы, которые Герц, может быть, случайно помнил из эпохи своей юности и студенческой жизни. Впрочем, и сам Герц отчасти (см. стр. 9, 47) берет этот упрек назад или, по крайней мере, смягчает его. Но нельзя же логические недостатки *индивидуального* изложения приписывать *системе* как таковой. Конечно, в настоящее время непозволительно (см. стр. 7) говорить об «односторонне» действующей силе или при центробежной силе «действие инерции учитывать два раза, один раз как массу, и второй раз как силу». Но это вовсе не необходимо, ибо это было уже вполне ясно Гюйгенсу и Ньютону. Обозначать силы, как часто «движущиеся впустую колеса», или говорить, что они часто не поддаются чувственному доказательству, вряд ли допустимо. Во всяком случае лучше здесь говорить о «силах», чем о «скрытых массах» и «скрытых движениях». Когда кусок железа спокойно лежит на столе, то обе силы, находящиеся в равновесии, вес железа и упругость стола, легко могут быть *доказаны*.

И с энергетической механикой дела не так уж плохо обстоят, как это рисует Герц. Что же касается возражений против применения принципов минимума, что они включают в себя допущение *цели*, что они предполагают стремление, имеющее в виду *будущее*, то именно в настоящей книге вполне ясно доказывается в другом месте, что простое значение принципов минимума заключается не в цели, а в совершенно другом обстоятельстве. Отношение к *будущему* мы находим во *всякой* механике, ибо каждой приходится применять понятия *времени*, *скорости* и т. д.

3. Но если мы не можем согласиться с критикой Герца существующих систем механики во всей ее суровости, то все же собственные, новые положения Герца нельзя не приветствовать, как значительный шаг вперед. В своем изложении Герц исходит исключительно из понятий времени, пространства и массы и совершенно исключает понятие силы, руководствуясь намерением дать выражение только тому, что действительно может быть *наблюдено*. Единственный основной прин-

цип, который он применяет, может быть понят, как сочетание закона инерции с принципом наименьшего принуждения Гаусса. Свободные массы двигаются прямолинейно и равномерно. Если они находятся в какой-либо связи, то они, согласно принципу Гаусса, возможно меньше уклоняются от этого движения; *действительное* их движение ближе к *свободному* движению, чем всякое другое *мыслимое* движение. Герц говорит, что массы вследствие своей связи двигаются по *самому прямому* пути. Всякое уклонение движения какой-нибудь массы от прямолинейности и равномерности Герц приписывает не *силе*, а (неподвижной) *связи* с другими массами. Там, где такие массы не видны, он представляет себе *скрытые* массы со *скрытыми* движениями. Все физические силы рассматриваются, как действия таких связей. Сила, силовая функция, энергия суть в его изложении лишь вторичные вспомогательные понятия.

Рассмотрим теперь важнейшие пункты отдельно и спросим себя, в какой мере они были подготовлены. К мысли об исключении понятия силы можно прийти следующим путем. В духе механики Галилея–Ньютона можно представлять себе все связи замещенными посредством сил, определяющих требуемые этими связями движения. Можно поэтому представлять себе и обратное, что все, что нам является как сила, имеет своим источником какую-нибудь связь. В более старых изложениях выступает часто в качестве исторически более простой и более близкой первая мысль, а у Герца получает преобладание вторая мысль. Но исходим ли мы из сил или связей, в обоих случаях *фактическая зависимость* движений масс друг от друга для каждой мгновенной конфигурации системы дана в линейных дифференциальных уравнениях между координатами масс. Если мы примем это во внимание, мы можем рассматривать, как нечто *существенное* и установленное опытом, существование именно этих последних уравнений. Физика и без того постепенно привыкает считать своей существеннейшей целью описание фактов при помощи дифференциальных уравнений, каковая точка зрения защищается и в настоящем сочинении (1883) в главе V. Но этим признана *общая применимость математических* положений Герца, независимо от дальнейшей интерпретации сил или связей.

Основной закон Герца может быть назван видоизмененным связями масс и обобщенным законом инерции. Для случаев более простых эта точка зрения была близка и часто могла напрашиваться сама собой. И действительно, и в настоящей книге (глава III) принцип со-

хранения центра тяжести и сохранения поверхностей рассматривается как обобщенный закон инерции. Если же принять во внимание, что, согласно принципу Гаусса, *связь* масс определяет минимум отклонения от тех движений, которые выполняла бы каждая из них в отдельности, то нетрудно прийти к основному закону Герца, рассматривая связи, как источник *всех сил.* Ибо с разрушением всех связей остаются в качестве *последних* элементов только изолированные массы, движущиеся по закону инерции. Таким образом, связь дает наивозможно меньшее отклонение от прямолинейного равномерного движения.

Гаусс уже ясно высказал, что существенно (материально) новый принцип механики не может быть более найден. И принцип Герца нов только по *форме*, ибо он тождественен уравнениям Лагранжа. Условие минимума, заключающееся в этом принципе, не относится к какой-нибудь загадочной цели, но смысл его таков, каков смысл всех законов минимума. Происходит только то, что определено динамически (глава III). Отклонение от действительного движения не определено динамически; это отклонение не существует, *действительное* движение поэтому определено *однозначно* или, согласно превосходному обозначению Петцольдта, *единственным в своем роде образом*[1].

Вряд ли есть необходимость вполне определенным образом указать на то, что с развитием этой формально-математической системы механики физически-механические вопросы не только не исчерпываются, но *даже не затрагиваются.* Свободные массы двигаются прямолинейно и равномерно. Массы неравной скорости и неравного направления, связанные вместе, влияют на скорость друг друга, т. е. определяют *ускорения* в каждой из них. Эти физическая данные опыта входят *рядом* с чисто геометрическими и арифметическими принципами в формулировку, для которой одни эти последние вовсе не были бы достаточны, ибо то, что однозначно определено только математически-геометрически, тем самым еще не однозначно определено и механически. Но о том, что упомянутые физические принципы вовсе не сами собой понятны и что точный смысл их даже вовсе не легко установить, было здесь (глава II) сказано подробно.

4. В прекрасном идеальном образе механики, который развил пе-

[1]Petzoldt. «Das Gesetz der Eindeutigkeit» (Vierteljahrsschrift. f. wissenschaftl. Philosophie, XIX, стр. 146) в особенности стр. 186. Там же упоминается и R. Henke, который в своем сочинении «Ueber die Methode der kleinsten Quadrate» («О способе наименьших квадратов») приближается к точке зрения Герца.

ред нами Герц, физическое содержание сократилось до остатка, едва *как будто* заметного. Вряд ли можно сомневаться в том, что Декарт, живи он в настоящее время, усмотрел бы свой собственный идеал в механике Герца еще скорее, чем в механике Лагранжа, «в аналитической геометрии четырех измерений». Не признавал же Декарт, в оппозиции против скрытых качеств схоластики, за материей никаких других свойств, кроме *протяжения и движения*, и хотел же он свести всю механику и физику к геометрии движений при предположении раз от начала данного *неразрушимого движения.*

5. Психологически очень легко отдать себе отчет в том, что привело Герца к его системе. После того, как удалось представить электрические и магнитные *действующие на расстоянии силы*, как последствия движений в некоторой среде, не могло не возродиться желания сделать то же самое и для сил тяготения и, если возможно, для всех сил, и сама собой напрашивалась мысль попытаться, нельзя ли вообще исключить понятие силы. Да и нельзя также отрицать того, что, когда мы рассматриваем все процессы в одной среде со всеми содержащимися в ней большими массами, когда мы видим все это в *полной* единой картине, то наше представление находится на *совершенно другой плоскости*, чем в том случае, когда нам известно только отношение ускорений тех изолированных масс. С этим охотно можно согласиться, и *не* соглашаясь с тем, что взаимодействие соприкасающихся частей *понятнее*, чем действие на расстоянии. Вся современная фаза развития физики принуждает к этой точке зрения.

Если бы мы не захотели только в общем принять допущение скрытых масс и движений, а попытались бы серьезно оперировать им *в отдельных случаях*, мы были бы вынуждены, по крайней мере, при современном состоянии наших физических знаний, уже в простейших случаях прибегать к странным, часто довольно рискованным фикциям, которым очень даже следовало бы предпочесть *данные* ускорения. Если, например, масса m равномерно движется по кругу радиуса r со скоростью v, что обыкновенно сводится к исходящей из центра круга центральной силе $\frac{mv^2}{r}$, то можно вместо этого представлять себе массу неподвижно связанной с другой массой равной величины, но имеющей противоположную скорость и находящейся от первой на расстоянии $2r$. Центростремительное действие Гюйгенса могло бы представить другой пример замены силы связью. Как *идеальная программа*, механика Герца прекраснее и цельнее, но для *применения* полезнее пользоваться нашей

обыкновенной механикой, на что указывает и сам Герц (стр. 47) с присущей ему справедливостью[1].

10. Различные точки зрения на изложенные здесь идеи

1. Взгляды, изложенные в двух первых главах настоящей книги, я разделяю уже с давних пор. Первоначально эти взгляды почти у всех без исключения встретили очень холодный прием и были отклонены, и лишь постепенно росло число сторонников их. Все существенные положения моей механики я впервые изложил в моем небольшом сообщении (на пяти страницах) «Ueber die Definition der Masse» («Об определении массы»). Это — положения, изложенные на стр. 214, 214 настоящей книги. Господин Поггендорфф отклонил помещение этого сообщения в своих «Анналах», и потому оно появилось лишь год спустя (1868 г.) в Carls Repertorium. В лекции, прочитанной в 1871 году, я точно охарактеризовал мою теоретико-познавательную точку зрения в естествознании вообще и в физике в особенности. Понятие причины заменено здесь понятием функции, установление взаимной *зависимости* между явлениями, *экономическое* изображение *фактической действительности* провозглашено *целью* науки, а физические понятия исключительно *средствами* к этой цели. Возложить ответственность за содержание этой лекции на редактора журнала я уже не пожелал, и потому она была обнародована в 1872 году, как особое сочинение[1]. Когда же Кирхгофф в 1874 году выступил в своей механике со своим принципом «описания», выступил с положениями, которые соответствовали только *части* моих, и тем не менее вызвал «всеобщее изумление» специалистов, я научился быть скромным. Но мало-помалу великий авторитет Кирхгоффа оказал все же свое влияние, что, без сомнения, привело и к тому, что моя механика, появившаяся в 1883 году, не показалась уже столь странной. Ввиду этой огромной помощи со стороны Кирхгоффа мне могло казаться уже маловажным то, что в моих принципиальных физических взглядах видели и отчасти теперь еще видят лишь дальнейшее развитие

[1] См. также J. Classen. «Die Principien der Mechanik bei Hertz und Boltzmann. Jahrb. d. Hamburgischer wissenschaftlichen Anstalten, XV, стр. 1. Hamburg, 1898.

[1] «Erhaltung der Arbeit» («Сохранение работы»). Есть рус. пер. — *Прим. пер.*

взглядов Кирхгоффа, между тем как в действительности мои взгляды не только более стары, но и более радикальны[1].

В общем мои взгляды, по-видимому, встречают все больше и больше сторонников, причем согласие с ними постепенно захватывает все большие их части. Поэтому гораздо более соответствовало бы моей антипатии полемики спокойно ждать, присматриваясь, какая часть из высказанных мною идей признается уже приемлемой. Но я не могу оставить в неизвестности читателя относительно существующих еще противоречий и должен показать ему пути, какими он мог бы ориентироваться и по прочтении настоящей книги, не говоря уже о том, что и уважение к противникам требует рассмотрения их возражений. Противников этих много и самого разнообразного рода: историков, философов, метафизиков, логиков, дидактиков, математиков и физиков. Ни на одно из этих званий я не могу претендовать в значительной мере. Я могу здесь выдвинуть только важнейшие возражения и отвечать на них в качестве человека, живейшим и наивнейшим образом заинтересованного в том, чтобы понять рост физических идей. Будем надеяться, что это облегчит и другим во всем этом разобраться и создать себе собственные суждения.

В своих критико-познавательных сочинениях по физике[1] П. Фолькманн оказывается моим противником не столько своими многочисленными отдельными возражениями, сколько тем, что он держится старины, питая к ней особые симпатии. В действительности именно это меня от него отделяет. Ибо во всем остальном его точка зрения имеет много родственного с моей. Он принимает и «приспособление мыслей», и принцип «экономии», и принцип «сравнения», хотя, правда, его изложение отличается от моего известными индивидуальными чертами, да и способ выражения другой. С другой стороны, я считаю вполне удачно выбранным и удачно обозначенным важный принцип «изоляции» и «наложения», так что я его охотно принимаю. Охотно соглашусь я и с тем, что «круговорот познаний», «колебание» внимания «обратным своим действием» должны укрепить понятия, которые первоначально были малоопределенными. Что с этой точки зрения Ньютон в свое время сделал почти все, что было возможно, я сам признал и в этом я вполне схожусь с Фолькманном. Но я не могу согласиться с ним, когда он вместе

[1]См. предисловие к первому изданию.

[1]Erkenntnisstheoretische Grundzüge der Naturwissenschaft, Leipzig, 1896; Ueber Newton's Philosophia naturalis, Königsberg, 1898; Einführung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig, 1900. Мы цитируем по последнему сочинению.

с У. Томсоном и Тэтом считает работы Ньютона образцовыми и перед лицом существенно изменившихся критико-познавательных потребностей настоящего времени. Мне кажется, что процесс укрепления должен всегда приводить к положениям, которые только несущественным образом отличались бы от моих. За ясными и дельными рассуждениями Г. Гейманса[2] я слежу с истинным удовольствием, но меня отделяет от него моя — будь она справедлива или нет — антиметафизическая точка зрения. От Гефлера[1] и Поске[2] меня отделяют разногласия *преимущественно относительно частностей.* Что касается Петцольдта[3], то я вполне разделяю его принципиальную точку зрения и, если мы расходимся в чем-либо, то только в вопросах маловажного значения. На многочисленных сомнениях других ученых, ссылающихся на аргументы названных выше или исходящих из аналогичных оснований, я из внимания, к читателю здесь останавливаться не буду. Достаточно будет осветить *характер разногласий*, выдвигая отдельные важные пункты.

2. Продолжает представлять большие затруднения, по-видимому, примириться с моим определением массы. Streintz (см. стр. 186) возразил против него, что оно основано только на тяготении, хотя это было вполне ясно исключено уже в первой формулировке (1868). Тем не менее это возражение постоянно повторяется и недавно вновь повторено было Фолькманном (Ibid., стр. 18). В определении принят во внимание исключительно тот факт, что тела, находящиеся во взаимодействии, будь то, так называемые, действия на расстоянии, неподвижные или упругие связи — определяют друг для друга изменения скорости (ускорения). Ничего более, кроме этого, знать не нужно, чтобы с полной уверенностью и без всякой боязни, как бы не строить на песке, делать дальнейшие определения. Неверно далее утверждение Гефлера (Ibid., стр. 77), что в этом определении молча принимается *одна и та же сила*, действующая на обе массы. Здесь даже не принимается понятие силы, ибо это последнее строится лишь на понятии массы и тогда само по себе дает, избегая порочный круг Ньютона, принцип противодействия. При такой системе понятий нельзя сказать, что одно понятие основывается на другом, которое грозит ускользнуть из-под него. Такова именно, на мой взгляд, единственная достойная преследования цель круговорота

[2]Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens, II, Leipzig, 1894.

[1]Studien zur gegenwärtigen Philosophie der matemiatischen Mechanik, Leipzig, 1900.

[2]Vierteljahrsschr f. wissenschaftl. Philosophie, Leipzig, 1884, стр. 385.

[3]Das Gesetz der Eindeutigkeit (Vierteljahrsschr. f. wissenschaftliche Philosophie, XIX, стр. 146).

и колебания, о которых говорит Фолькманн. Раз масса определяется ускорениями, то отсюда нетрудно получить *как будто бы новые* вариации понятий, как «емкость ускорения», «емкость энергии движения» (Гефлер, Ibid., стр. 70). Для того чтобы можно было что-либо сделать в динамике с понятием массы — на этом я должен настаивать вполне определенно — это понятие должно быть *динамическим.* На количестве материи самом по себе строить динамику невозможно, а — самое большее — можно их склеить лишь произвольными допущениями (Ibid., стр. 71, 72). Количество материи само по себе никак не есть *масса*, но она и не теплоемкость, не теплота сгорания, неэквивалента питанию и т. д. Далее, *«масса»* не играет также никакой термической, а только *динамическую* роль (см. Гефлер, Ibid., стр. 71, 72). Напротив, различные физические количества друг другу пропорциональны. И 2–3 тела простой массы в такой же мере образуют на основании динамического определения одно тело с двойной, тройной массой, как это аналогичным образом происходит с теплоемкостью на основании термического определения. Никто не станет отрицать инстинктивной потребности в представлении количества, которой хочет дать выражение и Гефлер (Ibid., стр. 72) и которая достаточна также в повседневной жизни. Научное же понятие «количество материи» может быть выведено только из пропорциональности тех отдельных физических количеств, вместо того, чтобы понятие массы строить на понятии «количество материи». Измерение массы весом тела получается при моем определении само по себе, между тем как при обычном понимании или измеримость количества материи *однообразной динамической мерой* просто заранее предполагается (см. стр. 186, 188), или специальными опытами должно лишь быть доказано, что равные *веса* действительно относятся друг к другу при *всех* условиях, как равные массы. Как мне кажется, понятие массы *здесь* со времени Ньютона вообще в *первый* раз подвергнуто подробному анализу. Ибо историки математики и физики рассматривали, по-видимому, этот вопрос, как вопрос легкий и почти сам собою понятный. А между тем это — вопрос фундаментального значения и заслуживает и внимания моих противников.

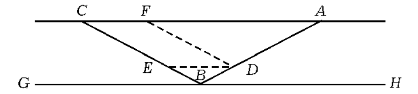
3. Против моей формулировки закона инерции приводились многообразные возражения. Я полагаю, что мне вместе с Поске (1884) удалось (в 1868 г.) доказать, что вывод этого закона из какого-нибудь общего принципа, подобно закону причинности, недопустим, и этот взгляд все более и более встречает признание (см. Гейманс, Ibid., стр. 432). Само

собой разумеется, что заранее очевидным нельзя считать принцип, который лишь столь недавно достиг всеобщего признания. Гейманс (Ibid., стр. 427) справедливо указывает на то, что несколько столетий тому назад именно противоположному утверждению приписывалась достоверность аксиомы. Только в том, что относят закон инерции к *абсолютному* пространству и что в принципе инерции, как и в античной противоположности его, принимается *нечто постоянное* в состоянии предоставленного самому себе тела, Гейманс (Ibid., стр. 433) видит нечто сверхэмпирическое. Что касается первого, то о нем у нас будет еще речь впереди, второе же понятно и психологически, без помощи метафизики, ибо только *постоянства* могут быть нам интеллектуально и практически полезны, вследствие чего мы и стремимся именно к ним. Конечно, своеобразна судьба этих *аксиоматических достоверностей*, если рассматривать их беспристрастно. Простому человеку вы тщетно станете доказывать по Аристотелю, что брошенный камень, предоставленный самому себе, должен собственно сейчас оставаться в покое и что он движется вперед только давлением воздуха. С таким же недоверием он отнесся бы однако и к бесконечному равномерному движению Галилея. Напротив того, взгляд Бенедетти относительно постепенно убывающей «vis impressa» (сообщенной силы) — взгляд, принадлежащий эпохе беспристрастного мышления и освобожденный от античных предрассудков, будет и простым человеком принят без противоречий. Этот взгляд есть именно непосредственная копия опыта, между тем как оба предыдущих взгляда, идеализирующих опыт в противоположном направлении, представляют собою продукт мышления профессиональных ученых. Иллюзию аксиоматической достоверности эти взгляды и вызывают *только у ученого*, вся привычная система мышления которого нарушается с нарушением этих *элементов* этого мышления. Этим отношение исследователей к принципу инерции достаточно, мне кажется, выясняется психологически, и я бы покуда оставил открытым вопрос, следует ли этот принцип назвать аксиомой, постулатом или максимой. Гейманс, Поске и Петцольдт сходятся на том, что они находят в принципе инерции эмпирическую и сверхэмпирическую сторону. По мнению Гейманса (Ibid., стр. 438), опыт дал только *повод* для применения априорного принципа. Поске находит, что эмпирическое происхождение не исключает априорности принципа (Ibid., стр. 401, 402). И Петцольдт (Ibid., стр. 188) выводит закон инерции только отчасти из опыта, а в другой части считает его данным в

законе однозначной определенности. Я не окажусь, я надеюсь, в противоречии с Петцольдтом, если я следующим образом сформулирую свое мнение: опыт должен сначала научить, какая существует зависимость между явлениями, *что* является определяющим началом, и этому может научить *только* опыт. Но когда мы полагаем, что достаточно уже это знаем, то при достаточных данных мы считаем излишним дожидаться дальнейших данных опыта; явление для нас определено и определено *однозначно* (ибо только это вообще есть определение). Поэтому, раз я узнал из опыта, что тела определяют друг в друге ускорения, то во всех случаях, где я не буду находить такие определяющие тела, я с однозначной определенностью буду ожидать равномерного прямолинейного движения. Так, закон инерции сейчас же получается в полной своей общности, без необходимости специализации, как предлагает Петцольдт, ибо каждое уклонение от равномерности и прямолинейности предполагает ускорение. Я думаю, что я прав, когда я говорю, что принципом — тела определяют друг в друге ускорения — и принципом инерции *дважды формулируется один и тот же факт* (см. стр. 119). Стоит с этим согласиться, чтобы совершенно отпал спор о том, представляет ли применение закона инерции порочный круг или нет (Поске, Гефлер).

В моем сочинении «О сохранении работы» я привел дословно цитату[1] из третьего диалога Галилея по падуанскому изданию 1744 года, т. III, стр. 124, откуда я заимствовал, каким образом Галилей, по всей вероятности, выяснил себе явление инерции. Представляя себе движе-

[1]Цитата эта гласит: Gonstat jam, quod mobile ex quiete in A descendens per AB, gradus acquirit velocitatis juxta temporis ipsius incrementum; gradum vero in B esse maximum acquisitorum, et suapte natura imutabiliter impressum sublatis scilicet causis accelerationis novae, aut retardationis; accelerationis in quam, si adhuc super extenso plano ulterius progrederetur; retardationis vero, dum super planum acclive BC fit reflexio; in horizontali autem GH aequabilis motus juxta gradum velocitatis ex A in B acquisitae in infinitum extenderetur. («Известно уже, что, если тело, находившееся в покое в точке A, движется вниз по пути AB, то скорость его в то же приращение времени возрастает; в точке B скорость его наибольшая и, оставаясь по своей природе неизменной, она при разных условиях может возрастать или убывать: она возрастает, если тело продолжает двигаться вниз по другой наклонной плоскости, и убывает, если тело двигается вверх по наклонной плоскости BC; по горизонтальному же пути GH тело может двигаться почти с той же скоростью, которую оно имеет в точке B, до бесконечности»).



ние тела по различным наклонным плоскостям с различным углом наклона, он не мог не обратить внимания на меньшее замедление на плоскостях с меньшим углом наклона, представляемых абсолютно гладкими, как и на замедление, равное нулю, и, следовательно, бесконечное равномерное движение на плоскости горизонтальной. Против этого первым восстал Wohlwill (см. стр. 117) и другие затем примкнули к нему. Он указывает на то, что у Галилея равномерное движение по кругу и движение горизонтальное занимают еще отдельное положение, что Галилей связан античными представлениями и освобождается от них только весьма постепенно. Естественно, что историка интересуют различные *фазы* развития его героя, и *одна* фаза при всей ее важности может быть отодвинута на задний план перед *остальными*. Нужно быть плохим психологом и плохо знать самого себе, чтобы не знать, как трудно отделаться от традиционных взглядов и как и тогда еще всплывают в сознании обломки старого взгляда, заставляя возвращаться к отдельным частям его, когда этот взгляд в общем уже преодолен. Не был свободен от этого и Галилей. Но для физика представляет величайший интерес именно момент *пробуждения новой мысли, нового познания*, и он направит свое внимание на отыскание именно такого момента. Я искал его, полагаю, что его нашел и что именно этот момент оставил свои *следы* в приведенной выше цитате. Поске (Ibid., стр. 393) и Гефлер (Ibid., стр. 111, 112) не считают возможным согласиться с моим пониманием этой цитаты, потому что Галилей не предпринимает вполне определенно этот предельный переход от наклонной к горизонтальной плоскости, хотя Поске признает, что такие предельные переходы Галилеем применялись часто, и хотя Гефлер (Ibid., стр. 113) испытал, по его словам, дидактическое действие этого перехода даже на учениках. Было бы действительно удивительно, если бы Галилей, который может считаться изобретателем принципа непрерывности, не применил бы этого принципа в течение всей своей долгой жизни мыслителя и к этому важнейшему для него случаю. Надо также принять во внимание то, что цитата эта не составляет части широкоразвивающегося итальянского диалога, а в сжатом догматическом виде в ней изложены на латинском языке лишь *результаты*. Так сюда попала, по-видимому, и «неразрушимая сообщенная степень скорости».

Физика, которая преподавалась мне, была, вероятно, в целом столь же плохой и догматичной, как и та, которая преподавалась более старым моим противникам и товарищам. Принцип инерции давался, как

догмат, который находился в полном соответствии со всей системой. Правда, я мог себе отдать отчет в том, что абстракция от препятствий движению может привести к этому принципу, что можно открыть его, как выражается Аппельт, при помощи *абстракции*, но он все же оставался чем-то лежащим в стороне и видимым только для сверхчеловеческого гения. И где была гарантия, что с отпадением всех препятствий отпало и убывание скорости? Поске, употребляя выражение, неоднократно примененное мной, полагает (Ibid., стр. 395), что Галилей усмотрел этот принцип непосредственным «*воззрением*». Но что такое это воззрение? Человек осматривается во все стороны и вдруг усматривает нечто искомое или также неожиданное, что привлекает внимание. Но я показал, как это воззрение получилось и в чем оно состояло! Галилей исследует различные равномерно-*замедленные* движения и вдруг усматривает среди них *одно движение, равномерное, бесконечное* и столь странное, что, появись оно одно само по себе, оно, наверное, было бы признано движением совсем особого рода. Но ничтожное изменение угла наклона превращает это движение в конечное и замедленное, с которым мы часто встречаемся. Тут нет уже никакой трудности распознать однородность всех препятствий движению с замедлением вследствие тяжести, чем получается *идеальная картина* свободного от всяких влияний бесконечного равномерного движения. Когда я молодым еще человеком читал это место у Галилея, передо мной совершенно иным светом осветилась необходимость этой идеальной картины в нашей механике, чем тогда, когда мне догматически преподавали физику. Я думаю, что всякий, кто наивно прочтет это место, увидит тот же свет. Я не сомневаюсь в том, что этот свет прежде всего был воспринят Галилеем. Пусть мои противники скажут, как можно с этим не согласиться!

4. Мне остается обсудить еще один важный пункт. В противоположность к К. Нейманну[1], известное сочинение которого по этому предмету было обнародовано несколько раньше моего[2], я утверждал, что принимаемые во внимание в законе инерции направление и скорость не имеют смысла, когда этот закон относится к «абсолютному пространству». И действительно, мы можем *определять* при помощи измерения направление и скорость только в пространстве, точки которого непосредственно или, по крайней мере, посредственно определяются данными телами. Сочинения мое и Нейманна имели, правда,

[1]«Die Principien der Galilei – Newton'schen Theorie», Leipzig, 1870.

[2]«Erhaltnug der Arbeit» («Сохранение работы». Есть рус. пер. — *Прим. пер.*)

тот успех, что они снова направили внимание на пункт, доставлявший много интеллектуальных страданий еще Ньютону и Эйлеру. Но кроме половинчатых попыток решения, как, например, попытка Streinz'a, это не дало ничего. Я до настоящего времени остался *единственным*, который относит закон инерции наивным образом к *Земле*, а для движений большого пространственного и временного протяжения к *небу неподвижных звезд*. Надежд на примирение с очень большим числом моих противников у меня ввиду глубокого различия точек зрения очень мало. Но насколько я вообще сумел *понять* сделанные мне возражения, я попытаюсь ответить на них.

Гефлер (Ibid., стр. 120–164) того мнения, будто потому отрицают *абсолютное* движение, что считают его «*недоступным нашему представлению*». Но это факт «*более тонкого самонаблюдения*», что представления абсолютного движения существуют. Не следует смешивать *мыслимость* абсолютного движения с *познаваемостью* его; отсутствует только *последняя*... Но естествоиспытателю важна именно познаваемость. Непознаваемое, не поддающееся чувственному доказательству, не имеет в естествознании *никакого значения*. Мне, впрочем, и в голову не приходит ставить какие-нибудь пределы *представлению* человека. Правда, я не свободен от подозрения, что кое-кто, представляющий себе «абсолютное движение», *обыкновенно* думает притом об образе воспоминания какого-нибудь пережитого относительного движения. Но происходит это оттого, что это вовсе не так важно. Я утверждаю даже больше еще, чем Гефлер. Существуют даже *чувственные иллюзии* абсолютного движения, которые поэтому могут быть воспроизведены и в представлении. Всякому, кто повторил мои опыты с двигательными ощущениями, пришлось пережить всю чувственную силу таких иллюзий. Кажется тогда, что отлетаешь или вращаешься со всей окружающей тебя средой, остающейся относительно собственного твоего тела в относительном покое, в пространстве, которое ничем осязательным не характеризуется. Но никакой масштаб не приложим к пространству *иллюзий*, его невозможно демонстрировать перед другим человеком и для метрически-абстрактного описания фактов механики оно не применимо. С пространством геометрии это пространство вообще ничего общего не имеет[1]. Наконец, Гефлер приводит следующий аргумент

[1]Мне поверят, я надеюсь, в том, что я вовсе не желаю сделать смешным серьезный спор, чтобы облегчить себе победу в нем. Но при обсуждении этих тем мне непроизвольно приходит всегда на память вопрос, который один очень любезный,

(Ibid., стр. 133): «При каждом относительном движении, по меньшей мере, *одно* из движущихся друг относительно друга тел должно обладать абсолютным движением». На это я могу ответить только то, что в глазах того, кто считает абсолютное движение физически вообще бессмысленным, этот аргумент никакой силы не имеет. Но вопросами философскими я здесь более заниматься не могу. Заниматься вопросами детальными, подобными тем, которые затрагивает Гефлер (Ibid., стр. 124–126), до соглашения в общем вопросе дело бесцельное.

Гейманс (Ibid., стр. 412–448) находит, что индуктивно-эмпирическая механика *могла бы возникнуть*, но что в *действительности возникла* другая механика, построенная именно на основе *неэмпирического* понятия абсолютного движения. Он видит затруднение, едва ли разрешимое какой бы то ни было из эмпиристических теорий, в том факте, что с давних пор (?) применяют принцип инерции не к движению относительно какой-либо поддающейся доказательству системы координат, а к неподдающемуся вовсе доказательству, «абсолютному движению». В этом Гейманс усматривает *проблему*, которая может быть решена только *метафизически*. В этом я не могу согласиться с Геймансом. Он признает, что в опыте даны только относительные движения. Этой уступкой, как и признанием возможности эмпирической механики, я вполне доволен. Что касается остального, то его можно, я надеюсь, объяснить просто и без помощи метафизики. Первые положения динамики были, без сомнения, построены на эмпирической основе. Телом, к которому относили движение, была Земля. Переход к другим системам координат происходит весьма постепенно. Гюйгенс видел, что движение сталкивающихся тел столь же легко относить к ладье, в которой они находились, как к Земле. Развитие астрономии в значительной мере предшествовало развитию механики. Когда же были замечены движения, которые, будучи отнесены к Земле, не оказались в согласии с известными уже механическими законами, не было вовсе надобности сейчас же отказаться от этих законов. Было уже наготове небо неподвижных звезд, которое с ничтожно малыми изменениями в различных представлениях восстановляло это согласие, как *новая* система координат. Стоит только представить себе, какие получились бы странности и затруднения, если бы в эпоху высокого развития механики и осно-

---

эксцентричный господин стал однажды обсуждать вполне серьезно: имеет ли локоть ткани, о которой мечтаешь, ту же длину, что и действительный локоть ткани. Обсуждение этого вопроса было для меня очень поучительно. Неужто же действительно ввести локоть из нашей мечты, как *нормальную меру*, в механику?

ванной на наблюдениях физики была еще в силе птоломеева система, что представляет собой дело вполне мыслимое.

Но Ньютон отнес всю механику к абсолютному пространству! Действительно, великая личность! Не нужна особенно большая вера в авторитеты, чтобы перед такой личностью преклониться. И тем не менее мы и по отношению к ней не можем отказаться от критики. Получается нечто весьма сходное, относят ли законы движения к *абсолютному* пространству или выражают их *абстрактно*, т. е. без ясного обозначения системы координат. Последнее безвредно и даже практично: при обсуждении какого-нибудь специального случая каждый механик прежде всего осматривается в поисках пригодной системы координат. Но ввиду того, что первое, где оно становится серьезным, почти всегда понимается в последнем смысле, ошибка Ньютона была не столь вредна и именно вследствие этого она удержалась так долго. То, что в эпоху более слабой теоретико-познавательной критики эмпирические законы находили слишком широкое применение, доходящее порой до *бессмысленности*, исторически и психологически понятно. Вряд ли поэтому следует вместо того, чтобы исправлять ошибки и упущения наших предков в науке, будь то люди маленькие или великие, строить из них какие-то метафизические проблемы. Я этим не хочу сказать, что этого никогда не бывало.

Петцольдт (Ibid., стр. 192 и след.), сходящийся со мной в отрицании абсолютного движения, ссылается на один принцип Авенариуса[1] и предлагает на основании этого принципа устранить затруднения в рассмотрении относительного движения. Принцип Авенариуса я понимаю; он мне не чужд. Но как можно обойти все физические затруднения при помощи принципа отнесения к собственному телу, мне осталось непонятным. Напротив, при формулировке какой-нибудь физической зависимости приходится отвлечься от собственного тела, поскольку оно не имеет влияния[2].

Наиболее подкупающие основания в пользу допущения абсолютного движения приведены были более тридцати лет тому назад еще К. Нейманном (Ibid., стр. 27). Представим себе вращающееся небесное тело, в котором развиты, поэтому, центробежные силы и которое приняло, поэтому, сплющенную форму. Исчезновение всех остальных не-

[1] «Der menschliche Weltbergiff», Leipzig, 1891 стр. 130 («Человеческое понятие о мире»). Есть рус. перев. — *Прим. пер.*

[2] «Анализ ощущений». Изд. С. А. Скирмунта.

бесных тел не может вызвать никакого изменения в его состоянии. Оно продолжает вращаться и остается сплющенным. Если же движение его только относительно, то случай вращения вовсе нельзя отличить от случая покоя. Все части мирового тела остаются друг относительно друга в покое, и сплющенность его должна поэтому исчезнуть сейчас же одновременно с исчезновением остального мира. Против этого я должен сделать два возражения. Я не вижу никакого приобретения, если для устранения противоречия делается допущение, само по себе бессмысленное. Далее мне кажется, что знаменитый математик сделал здесь слишком свободное употребление из весьма плодотворного, без сомнения, метода мысленного эксперимента. Чтобы в каком-нибудь случае могли выступать новые стороны, можно изменять в мысленном эксперименте какие-нибудь условия не существенные. Но что мир остается без влияния, такое допущение не допустимо. Если при исключении мира возникают противоречия, то это именно свидетельствует в пользу важности относительного движения, которое если и заключает в себе затруднения, то, по крайней мере, не противоречия.

Фолькманн (Ibid., стр. 53) хочет предпринять «абсолютную» ориентировку при помощи мирового эфира. Я высказал об этом свое мнение (см. стр. 197, 205), но очень заинтересован, как удастся отличить одну частичку эфира от другой. Покуда такого средства для различения не будет, предпочтительно держаться неба неподвижных звезд, а там, где оно служить не может, просто сознать, что такого ориентирующего средства нет еще, и его приходится лишь *искать*.

5. В общем я могу только сказать, что я не вижу, что следовало бы изменить в моем изложении. Отдельные пункты стоят в необходимой связи. После познания определяющих ускорения свойств тел, дважды формулированных Галилеем и Ньютоном, один раз в *общей* и один раз в *специальной* форме, как закон инерции, может быть дано только *одно* рациональное определение массы и именно только динамическое. На мой взгляд, это вовсе не дело вкуса[1]. Понятие силы и принцип противодействия вытекают оттуда сами собой. И исключение абсолютного движения есть то же, что устранение физически бессмысленного.

Я обнаружил бы не только весьма субъективный близорукий взгляд на науку, но прямо-таки большую смелость, если бы я ожидал, что именно *мои* представления смогут беспрепятственно приспо-

[1]Мое определение массы органичнее и даже гораздо естественнее, чем его собственное, может быть связано и с механикой Герца: в нем содержится уже в зародыше «основной закон».

собиться к кругам идей моих современников. Известно же из истории науки, что субъективные научные картины мира отдельных ученых всегда исправлялись и покрывались другими. И в картине мира, которую усваивает человечество, можно по истечении некоторого времени заметить лишь сильнейшие черты из картин даже людей наиболее выдающихся. Отдельный ученый может сделать только одно: возможно яснее начертить свою картину.

Глава III
Дальнейшее применение принципов и дедуктивное развитие механики

1. Значение принципов Ньютона

1. Принципов Ньютона достаточно, чтобы без привлечения какого-нибудь нового принципа рассмотреть каждый практически возможный случай механики, будь то из области статики или динамики. Если при этом возникают затруднения, то это всегда только затруднения математического (формального), но никогда не принципиального характера. Пусть в пространстве даны массы $m_1, m_2, m_3 \ldots$ с определенными скоростями $v_1, v_2, v_3 \ldots$ Пусть между каждой парой их проведены соединяющие их линии. В направлении этих соединяющих линий возникают ускорения и противоположные ускорения, зависимость которых от расстояния приходится определять в физике. В какой-нибудь небольшой элемент времени τ, например, масса m_5 пройдет в направлении начальной скорости путь $v_5\tau$ и в направлениях соединяющих линий с массами $m_1, m_2, m_3, \ldots$ она пройдет с ускорениями $\varphi_1^5, \varphi_2^5, \varphi_3^5 \ldots$ пути $\frac{\varphi_1^5}{2}\tau^2, \frac{\varphi_2^5}{2}\tau^2, \frac{\varphi_3^5}{2}\tau^2, \ldots$ Если мы будем представлять себе, что все эти движения происходят независимо друг от друга, мы получаем новое место массы m_5 в зависимости от времени τ. Сложение скоростей v_5 и $\varphi_1^5\tau, \varphi_2^5\tau, \varphi_3^5\tau$ дает новую скорость в конце времени τ. По истечении второго элемента времени τ мы снова таким же образом исследуем движение, принимая во внимание изменившиеся пространственные отношения масс. Таким же образом мы можем поступить с каждой другой массой. Мы видим, следовательно, что о *принципиальном* затруднении не может быть и речи, а только о затруднении *математическом*, если дело идет о точном разрешении задачи в законченных выражениях,

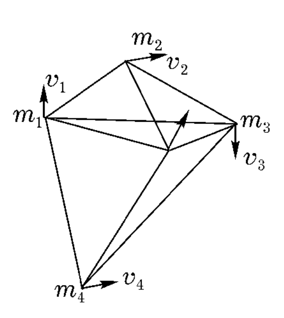


Рис. 144

а не об изучении процесса от момента к моменту. Если все ускорения массы m_5 или нескольких масс компенсируют друг друга, то соответственные массы находятся в равновесии и совершают только равномерное движение с начальными своими скоростями. Если эти начальные скорости равны нулю, то эти массы находятся в *равновесии и в состоянии покоя.*

Если размеры некоторых масс m_1, m_2 довольно значительны, так что об *одной* соединительной линии между двумя массами не может быть и речи, то принципиальное затруднение из-за этого бо́льшими не становится. Делят массы на достаточно малые части и проводят соединяющие линии между двумя такими частями. Далее принимается во внимание взаимодействие частей одной и той же большей массы — взаимодействие, которое, например, в случае неподвижных масс заключается в том, что эти части оказывают сопротивление каждому изменению расстояния между ними. При изменении расстояния между двумя частями наблюдается ускорение, пропорциональное изменению расстояния. Вследствие такого ускорения увеличенные расстояния уменьшаются, а уменьшенные опять увеличиваются. Смещением частей друг относительно друга пробуждаются известные силы упругости. Когда массы сталкиваются друг с другом, то силы упругости их пробуждаются лишь с их соприкосновением и началом изменения их форм.

2. Представим себе тяжелый вертикальный столб, покоящийся на земле. Частичка m внутри столба, мысленно выделенная нами, находится в равновесии и в состоянии покоя. Земля определяет в этой частичке вертикальное ускорение падения g, которому она и следует. Но при этом она приближается к ниже лежащим частичкам и пробужденные силы упругости обусловливают в частичке m вертикальное ускорение вверх, которое в конце концов становится с достаточным приближением равным ускорению g. Частички, лежащие выше частички m, тоже приближаются к частичке m с ускорением g. Вследствие этого снова возникают ускорение и противоположное ускорение, под действием которых частички, лежащие выше, приходят в состояние покоя, но частичка m приближается еще больше к нижележащим частичкам, пока ускорение вниз, испытываемое частичкой m от верхних частичек и увеличенное на ускорение g, не становится равным ускорению вверх, получаемому частичкой m от нижних частичек. То же самое рассуждение может быть применено к каждой части столба и к находящейся под ним земле. Нетрудно заметить, что тогда нижележащие части бо-

лее сближены, сильнее сжаты, чем верхние. Каждая часть лежит между высшей, менее сжатой, и низшей, более сжатой, частью; ее ускорение падения компенсируется приращением ускорения, которое она получает от нижних частей. Чтобы понять равновесие и состояние покоя частей столба, нужно представить себе действительно одновременно выполненными *все* ускоренные движения, определенные взаимодействием земли и частей столба. Представление это может показаться математически скудным, но это впечатление исчезает и представление сейчас же становится весьма живым, если принять во внимание, что в действительности ни одно тело не находится в состоянии полного покоя, а в нем всегда происходят небольшие нарушения, мелкие сотрясения, дающие небольшой перевес то ускорениям падения, то ускорениям упругости. Случай покоя представляет тогда лишь крайне редкий, никогда вполне не наступающий специальный случай движения. Сотрясения эти далеко не незнакомы нам. Но когда мы занимаемся случаями равновесия, то дело идет о *схематическом* воспроизведении механических фактов в мыслях. Мы тогда *намеренно* отвлекаемся от этих нарушений, смещений, сгибаний и сотрясений, которые нас более не интересуют. Но так называемая теории упругости изучает все случаи таких смещений и сотрясений, которые представляют практический или научный интерес. Результат работ Ньютона заключается в том, что мы можем везде справиться при помощи одной и той же мысли и с ее помощью воспроизвести и предусмотреть все случаи равновесия и движения. Все случаи механики представляются нам тогда, как случаи вполне однообразные, содержащие одни и те же элементы.

3. Рассмотрим другой пример. Две массы m, m находятся друг от друга на расстоянии a. Пусть они перемещаются в направлении друг к другу и пусть при этом пробуждаются силы упругости, пропорциональные изменению расстояния между ними. Пусть эти массы могут двигаться в направлении X, параллельном расстоянию a, и пусть их координаты будут x_1, x_2. Если теперь в точке x_2 будет приложена сила f, мы получим уравнения:

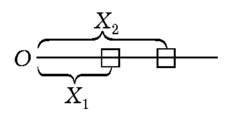


Рис. 145

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = p[(x_2 - x_1) - a], \tag{1}$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -p[(x_2 - x_1) - a] + f. \tag{2}$$

Здесь p означает силу, которую одна масса оказывает на другую, когда расстояние между ними изменяется на единицу длины. Этими уравнениями определяются все количественные свойства механического процесса. Мы можем получить их в общей форме интегрированием этих уравнений. Обыкновенно поступают так: многократным дифференцированием указанных уравнений получают достаточное число новых уравнений, чтобы можно было посредством исключения получить уравнения только с x_1 или только с x_2, и эти уравнения потом интегрируют. Мы здесь изберем другой путь. Вычтя первое уравнение из второго, мы получаем

$$m\frac{d^2(x_2 - x_1)}{dt^2} = -2p[(x_2 - x_1 - a)] + f$$

или, приняв $x_2 - x_1 = u$,

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -2p[u - a] + f. \qquad (3)$$

Прибавив первое уравнение ко второму, мы получаем:

$$m\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = f$$

или, приняв $x_1 + x_2 = v$,

$$m\frac{d^2v}{dt^2} = f. \qquad (4)$$

Интегралы (3) и (4) будут соответственно

$$u = A\sin\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + B\cos\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + a + \frac{f}{2p};$$

$$v = \frac{f}{m}\cdot\frac{t^2}{2} + Ct + D.$$

Следовательно,

$$x_1 = -\frac{A}{2}\sin\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t - \frac{B}{2}\cos\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + \frac{f}{2m}\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{Ct}{2} - \frac{a}{2} - \frac{f}{4p} + \frac{D}{2},$$

$$x_2 = +\frac{A}{2}\sin\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + \frac{B}{2}\cos\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + \frac{f}{2m}\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{Ct}{2} + \frac{a}{2} + \frac{f}{4p} + \frac{D}{2}.$$

Чтобы получить случай специальный, мы примем, что сила f начинает действовать при $t = 0$ и что к этому времени

$$x_1 = 0, \quad \frac{dx_1}{dt} = 0,$$

$$x_2 = a, \quad \frac{dx_2}{dt} = 0.$$

Таким образом, начальные положения даны и начальные скорости $= 0$. Этим постоянные A, B, C, D определяются так, что мы получаем

$$x_1 = \frac{f}{4p}\cos\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + \frac{f}{2m}\cdot\frac{t^2}{2} - \frac{f}{4p}, \tag{5}$$

$$x_2 = -\frac{f}{4p}\cos\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + \frac{f}{2m}\cdot\frac{t^2}{2} + a + \frac{f}{4p}, \tag{6}$$

$$x_2 - x_1 = -\frac{f}{2p}\cos\sqrt{\frac{2p}{m}}\cdot t + a + \frac{f}{2p}. \tag{7}$$

Из уравнений (5) и (6) мы видим, что, кроме равномерно ускоренного движения с половиной ускорения, которое сила f сообщила бы каждой из этих масс отдельно, обе массы совершают еще колебательное движение, симметричное относительно их центра тяжести. Продолжительность этого колебательного движения $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2p}}$ тем меньше, чем больше сила, которая пробуждается при одном и том же перемещении масс (и — когда мы рассматриваем две части одного и того же тела, — чем тверже тело). Амплитуда колебательного движения $\frac{f}{2p}$ тоже становится тем меньше, чем меньше величина p пробужденной силы перемещения. Уравнение (7) наглядно изображает периодическое изменение расстояния обеих масс во время поступательного движения. Движение упругого тела можно было бы в этом случае назвать червеобразным. В случае тел твердых число колебаний однако становится столь большим, а их амплитуда столь малой, что эти колебания остаются незамеченными и ими можно пренебречь. Колебательное движение исчезает также или постепенно под действием сопротивления, или в том случае, если обе массы в момент, когда начинает действовать сила f, находятся на расстоянии друг от друга $a + \frac{f}{2p}$ и имеют *равные* начальные скорости.

Расстояние $a + \frac{f}{2p}$, на котором находятся массы с прекращением колебательного движения, больше на $\frac{f}{2p}$ расстояния a, при котором массы находятся в равновесии. Дело в том, что под действием силы f происходит растяжение y, уменьшающее ускорение предшествующей массы наполовину, между тем как ускорение последующей массы увеличивается наполовину. При этом, согласно нашему допущению, $\frac{py}{m} = \frac{f}{2m}$ или $y = \frac{f}{2p}$. Отсюда видно, что при помощи принципов Ньютона могут быть установлены мельчайшие подробности такого процесса. Исследование становится математически (но не принципиально) сложнее, когда представляют себе тело разделенным на много мелких частей, связанных упругостью. И здесь можно не принимать во внимание колебаний при достаточной твердости тел. Тела, в которых мы намеренно рассматриваем взаимное перемещение частей, как ничтожно малое, и пренебрегаем им, называются *твердыми* телами.

4. Рассмотрим теперь случай, представляющий *схему рычага.* Мы представляем себе массы M, m_1, m_2 размещенными в треугольнике и связанными упругой связью. Каждое изменение сторон, а следовательно, и каждое изменение углов обусловливает ускорения, при посредстве которых наш треугольник стремится к прежней форме и величине. С помощью принципов Ньютона мы можем вывести на такой схеме законы рычага и в то же время чувствуем, что *форма* этого вывода, хотя и становится несколько сложнее, остается допустимой еще, если мы переходим от *схематического* рычага из трех масс к рычагу *действительному.* Массу M мы или принимаем очень великой, или представляем себе в такого рода связи с очень большими массами (например, с Землей), что она связана с ними при посредстве больших сил упругости. Тогда M представляет *точку вращения*, не участвующую в движении.

Теперь пусть масса m_1 получает от внешней силы ускорение f перпендикулярно к соединяющей линии $Mm_2 = c+d$. Тотчас же наступает растяжение линии $m_1m_2 = b$ и $m_1M = a$ и по этим направлениям получаются соответственно неопределенные еще ускорения s и σ, части которых $s\frac{e}{b}$ и $\sigma\frac{e}{a}$ имеют направление, противоположное ускорению f. Высота треугольника m_1m_2M есть e. Масса m_2 получает ускорение s',

которое распадается на две составляющие — одну $s'\frac{d}{b}$, направленную к точке M, и другую $s'\frac{e}{b}$, направленную параллельно ускорению f. Первая составляющая обусловливает небольшое приближение массы m_2 к массе M. Ускорения в массе M, обусловленные противодействием масс m_1 и m_2, ввиду большой массы незаметны. Мы поэтому намеренно абстрагируем движение массы M.

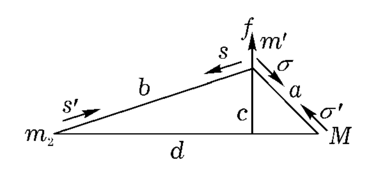


Рис. 146

Итак, масса m_1 получает ускорение $f - s\frac{e}{b} - \sigma\frac{e}{a}$, а масса m_2 — параллельное ускорение $s'\frac{e}{b}$. Между s и σ существует простое соотношение. Если связь *очень устойчивая*, то перемещения в треугольнике так малы, что незаметны. Составляющие ускорения от s и σ, ***перпендикулярные*** к ускорению f, компенсируют друг друга. Ибо, будь это хотя бы на один момент не так, большая составляющая обусловила бы и большое перемещение, последствием чего сейчас же была бы компенсация ее. Поэтому равнодействующее ускорение от ускорений s и σ прямо противоположно ускорению f, вследствие чего мы, очевидно, имеем $\sigma\frac{c}{a} = s\frac{d}{b}$. Далее между s и s' существует известное соотношение $m_1 s = m_2 s'$ или $s = s'\frac{m_2}{m_1}$. В общем и целом массы m_2 и m_1 получают соответственно ускорения $s'\frac{e}{b}$ и $f - s'\frac{e}{b} \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{c+d}{c}$, или так же, если для переменной величины $s'\frac{e}{b}$ введем обозначение φ, ускорения φ и $f - \varphi\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{c+d}{c}$.

Когда в треугольнике начинается перемещение, ускорение массы m_1 вследствие нарастания ускорения φ начинает убывать, а ускорение массы m_2 — возрастать. Если мы примем высоту треугольника e очень малой, наши рассуждения остаются еще применимыми; при этом однако получается $a = c = r_1$ и $a + b = c + d = r_2$. Мы видим также, что перемещение должно нарастать, а следовательно, и ускорение φ нарастать и ускорение массы m_1 убывать до тех пор, покуда ускорения масс m_1 и m_2 относятся как r_1 к r_2. Это соответствует *вращению* всего треугольника (без дальнейшего перемещения) около точки M, масса которой вследствие исчезающе малых ускорений находится в состоянии покоя. Раз наступило вращение, то отпадает всякая причина к дальней-

шим изменениям ускорения φ. Тогда, следовательно, мы имеем

$$\varphi = \frac{r_2}{r_1}\left(f - \varphi\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{r_2}{r_1}\right) \quad \text{или} \quad \varphi = r_2\frac{r_1 m_1 f}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}.$$

Угловое ускорение рычага ψ будет

$$\psi = \frac{\varphi}{r_2} = \frac{r_1 m_1 f}{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}.$$

Ничто нам не мешает рассмотреть этот случай еще ближе и определить взаимные перемещения и колебания частей друг относительно друга. Но при связях достаточно устойчивых можно от этого отказаться. Мы замечаем, что, применяя принципы Ньютона, мы пришли к тому же результату, к которому мог бы привести и метод исследования Гюйгенса. Это не представляется удивительным, если помнить, что оба метода совершенно *эквивалентны* и исходят только из различных сторон одного и того же дела. Пользуясь методом Гюйгенса, мы пришли бы к цели быстрее, но с меньшим выяснением подробностей процесса. Мы воспользовались бы работой, совершенной при перемещении массы m_1, для определения живых сил масс m_1 и m_2, причем мы сделали бы допущение, что соответственные скорости v_1 и v_2 относятся друг к другу, как $r_1 : r_2$. Рассмотренный здесь пример очень удобен для выяснения, что означает такое условное уравнение. Оно выражает только то, что достаточно уже небольших уклонений величины $\frac{v_1}{v_2}$ от $\frac{r_1}{r_2}$, чтобы появились большие силы, которые *на самом деле* препятствуют дальнейшему уклонению. Тела подчинены, конечно, не *уравнениям*, а *силам*.

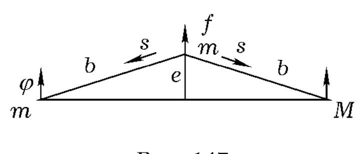


Рис. 147

5. Если мы в предыдущем примере примем $m_1 = m_2 = m$ и $a = b$ (рис. 147), мы получаем случай весьма наглядный. Динамическое состояние не изменяется более, если $\varphi = 2(f - 2\varphi)$, т. е. ускорения масс у основания и у вершины треугольника соответственно равны $\frac{2f}{5}$ и $\frac{f}{5}$. В начале перемещения ускорение φ нарастает, а ускорение массы у вершины треугольника убывает на величину *вдвое большую* до тех пор, покуда между ними существует отношение 2 : 1.

Рассмотрим еще *состояние равновесия* в схематическом рычаге, состоящем из трех масс m_1, m_2, M. Последнюю мы опять принимаем

очень великой или связанной упругой связью с очень большими массами. Пусть в m_1 и m_2 в направлении m_1m_2 действуют две равные и противоположные силы s и $-s$ или массам m_1, m_2 сообщены обратно пропорциональные ускорения. Растяжение связи m_1m_2 снова сообщает массам m_1, m_2 обратно пропорциональные ускорения, которые, компенсируя первые, обусловливают равновесие системы. Таким же образом мы представляем себе, что в m_1 и M действуют равные и противоположные силы t и $-t$ в направлении m_1M, а в направлении m_2M силы u и $-u$. В этом случае существует равновесие. Если масса M упругой связью связана с достаточно большими массами, то вовсе нет надобности прилагать силы $-u$ и $-t$, так как с наступлением перемещений эти силы развиваются сами и сохраняют равновесие. Равновесие, следовательно, существует и для двух равных и противоположных сил s и $-s$, и для двух совершенно произвольных сил t и u. И действительно, силы s и $-s$ уравновешивают друг друга, а силы t и u проходят через укрепленную неподвижно массу M и, следовательно, с наступлением перемещения разрушаются.

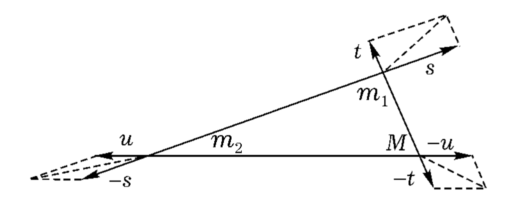


Рис. 148

Условие равновесия легко сводится к обыкновенной форме, если принять во внимание, что моменты сил t и u, каковые силы проходят через точку M, относительно M равны нулю, а моменты сил s и $-s$ равны и противоположны. Если мы примем, что сумма сил t и s равна p, а сумма сил u и $-s$ равна q, то согласно *геометрическому* правилу параллелограмма Вариньона, момент силы p будет равен сумме моментов s и t, а момент силы q — сумме моментов u и $-s$. Таким образом, моменты сил p и q равны и противоположны. Итак, две *произвольные* силы p и q *уравновешивают друг друга*, если они дают равные и противоположные составляющие в направлении m_1m_2, чем также дано равенство моментов относительно точки M. Столь же очевидно, что равнодействующая сил p и q тоже проходит через точку M, ибо силы s и $-s$ уравновешивают друг друга, а силы t и u проходят через точку M.

6. Как это видно из приведенного здесь примера, точка зрения Ньютона включает в себя точку зрения Вариньона. Мы вправе поэтому называть статику Вариньона статикой *динамической*, которая, исходя из основных идей современной динамики, добровольно ограничивается исследованием случаев равновесия. Разница только та, что в статике Вариньона вследствие *абстрактной* формы ее значение некоторых операций, как, например, перенесение точек приложения сил в собственном их направлении, не выступает столь ясно, как в разработанном выше примере.

Изложенные здесь рассуждения доказывают, что каждый механический случай, если только взять на себя труд, чтобы достаточно войти в подробности, может быть решен на основании принципов Ньютона. Мы *познаем* все относящиеся сюда случаи равновесия и движения, когда мы ускорения, которые определяют друг в друге массы, действительно видим в этих последних. Это все один и тот же великий факт, который мы постоянно познаем и, по крайней мере, можем познать, если хотим, в самых разнообразных процессах. Этим становятся возможными такое единство, такая однородность и экономия, с одной стороны, и такое богатство содержания физических воззрений — с другой, которые до Ньютона были недостижимы.

Но механика не является только *самоцелью*, а ей приходится *разрешать задачи* для удовлетворения практических потребностей и для поддержки других наук. Эти задачи с успехом решаются методами, отличными от метода Ньютона, но, как мы это доказали уже выше, с ними равноценными. Было бы поэтому непрактичным педантизмом, если бы, пренебрегая всеми остальными преимуществами, мы всегда и везде хотели прийти к простым воззрениям Ньютона. Достаточно раз убедиться, что это можно сделать во всякое время. С другой стороны, представления Ньютона на самом деле наиболее *удовлетворительны* и *очевидны*. Если Пуансо хочет рассматривать *только* эти представления, как основу, то он этим обнаруживает тонкое понимание того, что такое научная ясность и простота.

2. Обозначения и меры механики

1. Все важные обозначения современной механики были найдены и употреблялись уже во времена Галилея и Ньютона. Особые названия,

оказавшиеся целесообразными для них вследствие более частого их употребления, были отчасти установлены лишь гораздо позже. Единичные меры механики были приняты еще позже. Последняя работа и до настоящего времени не может быть собственно признана завершившейся.

2. Если мы обозначим буквой s путь, буквой t время, буквой v мгновенную скорость и буквой φ ускорение равномерно-ускоренного движения, мы получаем следующие, известные из исследований Галилея и Гюйгенса, уравнения

$$\left\{\begin{aligned} v &= \varphi t, \\ s &= \frac{\varphi}{2}t^2, \\ \varphi s &= \frac{v^2}{2}. \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Помножив эти уравнения на массу m, мы получим

$$\left\{\begin{aligned} mv &= m\varphi t, \\ ms &= \frac{m\varphi}{2}t^2, \\ m\varphi s &= \frac{mv^2}{2}. \end{aligned}\right.$$

Если же движущую силу $m\varphi$ обозначим буквой p, мы получим:

$$\left\{\begin{aligned} mv &= pt, \\ ms &= \frac{pt^2}{2}, \\ ps &= \frac{mv^2}{2}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Уравнения (1) содержат все величину φ и каждое из них, кроме того, содержит еще две величины из величин s, t, v, что наглядно выражено в следующей схеме:

$$\varphi\left\{\begin{matrix} v, & t, \\ s, & t, \\ s, & v. \end{matrix}\right.$$

Уравнения (2) содержат величины m, p, s, t, v, причем каждое из них содержит величины m, p, и еще две из трех величин s, t, v, согласно

схеме:

$$m, p \begin{cases} v, & t, \\ s, & t, \\ s, & v. \end{cases}$$

Уравнения (2) могут служить для решения самых различных вопросов относительно движений под действием постоянных сил. Если, например, хотят знать скорость v, которой достигает масса m в течение времени t под действием силы p, то мы из первого уравнения получаем $v = \frac{pt}{m}$. Если бы, наоборот, требовалось определить время, в течение которого масса m, обладая скоростью v, может двигаться против силы p, то из того же уравнения мы можем получить $t = \frac{mv}{p}$. Если же ставится вопрос о *расстоянии*, на котором масса m со скоростью v движется против силы p, мы из третьего уравнения можем получить $s = \frac{mv^2}{2p}$. Последние два вопроса наглядно показывают вместе с тем всю праздность спора между Декартом и Лейбницем о мере силы движущегося тела. Оперирование этими уравнениями весьма содействует уверенному и правильному употреблению понятий механики. Если, например, ставится вопрос, какая сила p сообщает данной массе m скорость v, то сейчас же видно, что между m, p, v *только* нет никакого уравнения, что здесь должно еще быть дано s или t, т. е. что вопрос этот неопределенный. Такие неопределенности человек скоро научается распознавать и избегать. Путь, который проходит масса m под действием силы p в течение времени t, если она движется с начальной скоростью, равной нулю, мы находим из второго уравнения: $s = \frac{pt^2}{2m}$.

3. Многие, содержащиеся в изложенных уравнениях численные выражения получили особые названия. Уже Галилей говорит о силе движущегося тела и называет ее то «моментом», то «импульсом», то «энергией». Он считает этот момент пропорциональным произведению из массы тела (или веса его, так как ясного понятия массы у Галилея, как собственно и у Декарта и у Лейбница, нет) на его скорость. Этот взгляд принимает и Декарт. Он принимает силу движущегося тела равной mv, называет это *количеством движения* и утверждает, что сумма всего количества движения в мире остается постоянной, так что когда одно тело теряет какую-нибудь часть своего количества движения, эта часть переходит к другому телу. Употребляет для выражения mv название «количество движения» и Ньютон, и это название сохранилось и до насто-

ящего времени. Для второго выражения pt первого уравнения Belanger (лишь в 1847 году) предложил название *импульса* силы. Выражения второго уравнения не получили особых названий. Выражение mv^2 третьего уравнения Лейбниц (1695) назвал *живой силой* и в противоположность Декарту он рассматривал его, как истинную меру силы движущегося тела, называя давление покоящегося тела силой мертвой. Кориолис нашел более подходящим дать название живой силы выражению $^1/_2mv^2$. Belanger предлагал назвать живой силой выражение mv^2, а выражение $^1/_2mv^2$ назвать живой способностью (Potenz), чем будет избегнута путаница. Кориолис употреблял также для выражения ps название *работы*. Понселе окончательно установил это название и принял в качестве единицы работы килограмм·метр, т. е. действие давления одного килограмма весом на расстоянии одного метра.

4. Что касается исторических подробностей относительно понятий «количество движения» и «живая сила», то будет небезынтересно несколько остановиться еще на тех идеях, которые привели Декарта и Лейбница к их мнению. В своей книге «Die Principien der Philosophie» («Принципы философии»), обнародованной в 1644 году, Декарт выражается следующим образом:

«После того, как была познана природа движения, необходимо рассмотреть его причину. Причина эта двоякая: во-первых, общая и первоначальная причина, обусловливающая всякое движение в мире; во-вторых, причина частная, обусловливающая в отдельных частях материи движение, которого раньше у них не было. Общая причина, очевидно, может быть одна: Бог, сотворивший с самого начала материю одновременно с движением и покоем и постоянной своей деятельностью сохраняющий столько движения и покоя в целом, сколько Он тогда сотворил. Ибо, если это движение и есть только состояние движущейся материи, то тем не менее оно образует же постоянное и определенное количество, которое очень даже может оставаться во всем мире себе равным, изменяясь в отдельных частях его. Происходит это таким образом, что в случае вдвое более быстрого движения какой-нибудь части относительно другой и в случае вдвое большей величины этой последней сравнительно с первой, принимают, что в меньшей части содержится столько же движения, сколько в большей, и что в какой мере движение одной части становится медленнее, в такой же мере движение другой столь же великой части должно стать быстрее. Мы видим совершенство Бога и в том, что Он не только сам неизменен, но Он и дей-

ствует возможно более постоянным и неизменным образом, так что, за исключением изменений, которые нам известны через ясный опыт или Божественное Откровение и которые, согласно нашему пониманию или нашей вере, происходят без изменений в Творце, мы никаких других изменений в Его творениях принимать не должны, чтобы отсюда не было возможно умозаключение к непостоянству в Нем Самом. Поэтому и вполне разумно принять, что, как при сотворении материи Бог сообщил частям ее различные движения и как Он сохраняет всю эту материи в той же форме и в той же пропорции, как Он ее сотворил, так Он всегда *сохраняет в ней одно и то же количество движения*».

Если за Декартом и числятся большие научные заслуги в отдельных областях знания, как, например, его исследование о радуге и открытие закона преломления, то все же значение его скорее заключается в общих великих революционизирующих идеях, внесенных им в философию, математику и естествознание. Трудно достаточно высоко оценить его замысел, подвергнуть сомнению все, что до тех пор считалось неопровержимой истиной. Правда, замысел этот более осуществлялся последующими учеными, чем им самим, и потому принес значительные плоды. Его мысли сделать излишними исследования отдельных фигур применением алгебры, сводить все к изучению расстояний, мы обязаны аналитической геометрией со всеми ее современными методами. Так он и из физики хотел изгнать всякие скрытые качества и обосновать всю физику на механике, которую он представлял себе, как чистую геометрию движений. Своими опытами он доказал, что он не признавал ни одной проблемы физики, которую невозможно было бы разрешить этим путем. Декарт слишком мало принимал во внимание, что механика возможна только тогда, когда положения тел определены в своей взаимной *зависимости* каким-нибудь отношением сил, функцией времени, и Лейбниц указал на этот пробел. Механические образы, которые набрасывал Декарт на скудных и малоопределенных основах, не могли быть признаны копиями природы и были названы фантазиями уже Паскалем, Гюйгенсом и Лейбницем. При всем том идеи Декарта продолжали влиять до настоящего времени, на что не раз указывалось выше. Оказал он также мощное влияние на развитие физиологии своим учением о зрении, как и воззрением на животных, как на машины (воззрением, которое он однако не осмелился распространить и на людей), чем он предвосхитил идею рефлективного движения. См. книгу Дюгема «L'evolution des theories physiques» («Эволюция физических теорий»).

Нельзя отказать также Декарту и в той заслуге, что он *первый стал искать более общую* и более плодотворную точку зрения в механике. Уж таково своеобразное действие *философа*, влияющее всегда плодотворным и возбуждающим образом на естествознание. Но Декарт не свободен и от всех обычных недостатков философа. Он, не задумываясь, доверяется собственным своим идеям и вовсе не спешит проверить их на опыте. Напротив того, он довольствуется минимумом опыта для максимума выводов. Присоединяется еще сюда расплывчатость его понятий. Ясного понятия массы у Декарта нет. Если естественнонаучные последователи Декарта, чувствовавшие потребность в более определенных понятиях, принимали, что он выражение mv определял, как величину движения, то это не совсем верно. Но величайший недостаток Декарта, наносящий ущерб всему его исследованию природы, заключается в том, что ему кажутся заранее очевидными и сами собой понятными положения, правильность которых может быть доказана только на опыте. Так, например, в двух последующих параграфах (37, 39) устанавливается, как нечто само собой понятное, что тело сохраняет свою скорость и свое направление. Данные опыта, приведенные в § 38, должны были бы служить не подтверждениями a priori очевидного закона инерции, а скорее основами его.

Точка зрения Декарта подверглась критике Лейбница (1686) в его Acta eruditorum, в небольшом сочинении, носящем заглавие «Краткое доказательство удивительной ошибки Декарта и других относительно закона природы, по которому Творец, как эти авторы думают, старается всегда сохранить в природе одно и то же количество движения, но который совершенно разрушает науку механики».

В машинах, находящихся в равновесии, замечает Лейбниц, *грузы* обратно пропорциональны скоростям перемещения, и вследствие этого пришли к мысли рассматривать, как меру силы, произведение из *тела* («corpus», «moles») на *скорость*. Декарт рассматривает это произведение как величину постоянную. Лейбниц же полагает, что упомянутая мера силы в машинах оказывается правильной лишь случайно. Истинная же мера силы — другая и должна быть определена тем *путем*, которым шли Галилей и Гюйгенс. Каждое тело поднимается благодаря достигнутой им скорости падения настолько высоко, насколько оно упало. Если же принимают, что нужна одна и та же «*сила*», чтобы поднять тело m на высоту $4h$ и тело $4m$ на высоту h, то, так как в первом случае достигнутая скорость падения лишь вдвое больше, чем в последней, *мерой*

силы следует признать произведение из «тела» на квадрат скорости.

В одной из последующих статей (1695) Лейбниц возвращается к тому же вопросу. Он различает между чистым давлением (мертвой силой) и силой движущегося тела (живой силой); последняя получается из суммы импульсов давления. Эти импульсы, правда, вызывают «impetus» (mv), но этот последний не есть истинная мера силы, а так как *причина* должна соответствовать *следствию* (согласно приведенным выше рассуждениям), то эта сила определяется выражением mv^2. Далее Лейбниц замечает, что только с принятием его меры силы исключена возможность perpetuum mobile.

Настоящее понятие массы Лейбниц столь же мало имеет, как и Декарт. Он говорит о теле (corpus), о тяжести (moles), о телах неравной величины, но одного и того же удельного веса и т. д. Только во второй статье встречается раз выражение «massa», заимствованное, вероятно, у Ньютона. Но кто хочет связать с выражениями Лейбница ясное понятие, тот должен думать о массе, как о ней думали последующие ученые. В остальном Лейбниц гораздо больше следует естественнонаучному методу, чем Декарт. Но все же две вещи смешивает и он: вопрос *о мере силы* и вопрос *о постоянстве сумм* $\sum mv$ и $\sum mv^2$. Оба вопроса не имеют собственно между собой ничего общего. Что касается первого из них, то мы уже знаем, что имеют свои основания, каждая в другом смысле, мера силы, или скорее, мера способности движущегося тела к действию, и Декарта и Лейбница. Но обе эти меры не следует смешивать, как это вполне правильно замечает и Лейбниц, с обыкновенной мерой силы (Ньютона).

Что касается второго вопроса, то позднейшие исследования Ньютона показали, что декартовская сумма *свободных* систем масс, $\sum mv$, не испытывающих никакого воздействия извне, в действительности неизменна, а исследования Гюйгенса показали, что и сумма $\sum mv^2$ остается постоянной, если ее не изменяют совершенные силами *работы*. Таким образом, спор, возбужденный Лейбницем, имел в своей основе *немало недоразумений* и продолжался 57 лет до обнародования книги д'Аламбера «Traité de dynamyque» (1743). К теологическим идеям Декарта и Лейбница мы еще вернемся.

5. Изложенные три уравнения могут быть признаны *основными уравнениями* механики, хотя они и относятся только к *прямолинейным* движениям под действием *постоянных* сил. Если движение остается прямолинейным, но силы становятся переменными, то при помощи не-

большого видоизменения, почти само по себе понятного, эти уравнения переходят в другие. Мы приведем здесь эти последние только в кратких чертах, так как математические выводы составляют для этого сочинения дело побочное.

Первое уравнение при переменных силах принимает следующий вид: $mv = \int p\,dt + C$, где p есть переменная сила, dt есть элемент времени ее действия, $\int p\,dt$ — сумма всех произведений $p\,dt$ в течение *времени действия* и C — постоянная величина, представляющая величину mv до начала действий силы.

Второе уравнение аналогичным образом переходит в уравнение: $s = \displaystyle\int dt \int \frac{p}{m} dt + Ct + D$ с двумя так называемыми интеграционными постоянными.

Третье уравнение следует заменить следующим уравнением:

$$\frac{mv^2}{2} = \int p\,ds + C.$$

Криволинейные движения можно всегда представлять себе, как одновременную комбинацию трех прямолинейных движений и всего лучше по трем перпендикулярным друг к другу направлениям. И в этом, наиболее общем случае приведенные уравнения сохраняют свое значение для составляющих движения.

6. Сложение, вычитание или уравнивание имеют понятный смысл только в применении к величинам одного и того же рода. Невозможно складывать массы с временами или массы со скоростями, или приравнивать одни другим, а можно только складывать массы с массами и т. д. Поэтому, когда перед нами уравнение механики, то возникает вопрос, суть ли члены его действительно *однородные* величины, т. е. можно ли их измерять *одной и той же* единицей или, как обыкновенно выражаются, *однородно* ли уравнение. Итак, нам необходимо исследовать единицы мер механики.

Выбор единиц, представляющих, конечно, величины одного и того же рода, что и подлежащие измерению, есть во многих случаях дело произвольное. Так, пользуются в качестве единицы массы произвольно выбранной массой, в качестве единицы длины — произвольной длиной и в качестве единицы времени — произвольным временем. Служащие в качестве единиц, масса и длина могут сохраняться, время может быть всегда воспроизведено при помощи маятников и астрономических наблюдений. Но единицу скорости, единицу ускорения и т. д. сохранить

невозможно и во всяком случае гораздо труднее воспроизвести. Зато эти величины так связаны с произвольно выбранными основными единицами массы, длины и времени, что легко могут быть из них выведены. Такие единицы называются *производными* или *абсолютными*. Последнее название исходит от Гаусса, который впервые вывел магнитные массы из механических и тем достиг *общей сравнимости* магнитных измерений. Название это имеет, следовательно, историческое основание.

В качестве единицы скорости мы могли бы выбрать, например, такую скорость, с которой в единицу времени проходится q единиц длины. Но тогда мы отношение между временем t, путем s и скоростью v не могли бы уже писать в обычной простой форме $s = vt$, а должны были бы выразить его в следующем уравнении $s = q \cdot vt$. Но если мы определяем в качестве единицы скорости ту скорость, с которой в единицу времени проходится единица длины, то можно сохранить и уравнение $s = vt$. Выбирают выведенные единицы так, чтобы отношения между ними были наиболее просты. Так, например, в качестве единицы поверхности и объема выбирается всегда квадрат и куб со стороной, равной единице длины.

Придерживаясь намеченного здесь принципа, мы, следовательно, принимаем, что с единицей скорости проходится в единицу времени единица длины, что единица ускорения есть приращение единицы скорости в единицу времени, что единица силы сообщает единице массы единицу ускорения и т. д.

Выведенные единицы зависят от произвольно выбранных основных единиц, они — функции их. Функцию, соответствующую производной единице, мы называем ее *измерением*. Учение об измерениях обосновано Фурье (1882) в его теории теплоты. Если мы обозначим длину через l, время через t и массу через m, то измерение скорости, например, будет $\frac{l}{t}$ или lt^{-1}. Отсюда нетрудно понять следующую таблицу:

		Измерение
Скорость	v	lt^{-1}
Ускорение	φ	lt^{-2}
Сила	p	mlt^{-2}

Количество движения	mv	mlt^{-1}
Импульс	pt	mlt^{-1}
Работа	ps	ml^2t^{-2}
Живая сила	$\frac{mv^2}{2}$	ml^2t^{-2}
Момент инерции	θ	ml^2
Статический момент	D	ml^2t^{-2}

Таблица эта сейчас же показывает, что рассмотренные выше уравнения действительно *однородны*, т. е. содержат только *однородные* члены. Каждое новое выражение механики могло бы быть исследовано аналогичным образом.

7. Кроме приведенных уже выше соображений, знание измерений какой-нибудь величины важно еще по одной причини. Когда нам дана какая-нибудь величина в одних основных единицах и мы хотим перейти к другой системе таких единиц, то новые размеры нашей величины могут быть легко выражены с помощью ее измерений. Измерение ускорения, например, выраженное числом φ, есть It^{-2}. Если мы изберем в качестве единицы длины длину, в λ раз большую, и в качестве единицы времени — время в τ раз большее, то в выражении lt^{-2} остается вместо l поместить число в λ раз меньшее и вместо t — число в τ раз меньшее. Численное выражение этого ускорения, выраженное в новых единицах, будет, следовательно, $\frac{\tau^2}{\lambda}\cdot\varphi$. Если выбрать в качестве единицы длины метр и в качестве единицы времени — секунду, то ускорение падающего тела, например, будет выражено числом $9,81$ или, если писать измерение и основные меры одновременно, это ускорение будет выражено так: $9,81\frac{\text{метр}}{\text{секунда}^2}$. Если теперь перейти к новым основным единицам, если выбрать в качестве единицы длины километр ($\lambda = 1000$), в качестве единицы времени минуту ($\tau = 60$), то же ускорение будет выражено так: $\frac{60\times 60}{1000}\times 9,81$ или $35,316\frac{\text{километр}}{\text{минута}^2}$.

8. В качестве единицы длины обычно употребляется метр (длина сохраняемого в Париже платинового масштаба при 0°C почти $\frac{1}{10^7}$ четверти земного меридиана), в качестве единицы времени — секунда (среднее солнечное, а иногда звездное время). Принимая во внимание приведенные выше замечания, принимают в качестве единицы скорости ту скорость, с которой приходится один метр в секунду, и в качестве

единицы ускорения то ускорение, которое соответствует приращению скорости за секунду.

Усложнения появляются с выбором единицы *массы* и единицы силы. Если выбирают в качестве единицы массы *массу* парижского платинового килограмма (почти массу кубического дециметра воды при 4°C), то сила, с которой этот килограмм притягивается к Земле, равна не 1, а так как $p = mg$, имеет величину g, и в Париже, следовательно, равна 9,808, а в других местах земного шара имеет несколько иную величину. Единицей силы является тогда та сила, которая в секунду сообщает массе одного килограмма приращение скорости в один метр в секунду. Единица работы есть тогда действие этой единицы силы на одном метре пройденного расстояния и т. д. Эта последовательная метрическая система мер, в которой за единицу принята *масса* одного килограмма, обыкновенно называется *абсолютной системой мер.*

Так называемая *земная* система мер получается, если *силу*, с которой *парижский* килограмм притягивается к Земле в *Париже*, принять равной единице. Чтобы сохранить простое соотношение $p = mg$, принимают массу этого килограмма равной не единице, а $\frac{1}{g}$. В таком случае, единицу массы имеют только g, или $9,808$, таких килограммов вместе. Тот же килограмм притягивается к Земле в другом месте земного шара A с ускорением g^1 и не с силой 1, а с силой $\frac{g^1}{g}$. Вследствие этого $\frac{g}{g^1}$ парижского килограмма соответствует в этом месте силе в 1 кг. Если поэтому мы возьмем g^1 таких грузов, производящих давление в месте A с силой 1 кг, то мы опять получим g раз массу парижского килограмма или массу 1. Но если мы в месте A имели бы тело, о котором знали бы, что оно в *Париже* притягивается с силой 1 кг, то мы должны были бы, понятно, за единицу массы считать не g^1, а g таких тел.

Тело, которое в Париже (в безвоздушном пространстве) весит p килограмм, имеет массу $\frac{p}{g}$. Тело, которое в A производит давление в p килограмм, имеет массу $\frac{p}{g^1}$. Разница между g и g^1 может быть во многих случаях оставлена без внимания, но если важна точность, то она должна быть принята во внимание.

Остальные единицы в земной системе, естественно, определяются выбором единицы силы. Так, работа 1 есть та работа, в которой сила

действует на путь 1, т. е. килограмм·метр. Живая сила 1 есть та живая сила, которая создается работой 1 и т. д.

Если тело, которое в *Париже* (в безвоздушном пространстве) весит p килограмм, заставить падать под 45° широты над уровнем моря (с ускорением $9,806$), то по абсолютной системе мер, мы будем иметь массу p, на которую действуют $9,806p$ единиц силы, а по земной системе мер — массу $\frac{p'}{9{,}808}$, на которую действуют $p\frac{9{,}806}{9{,}808}$ единиц силы. Если путь, пройденный телом в своем падении, равен одному метру, то совершенная работа и полученная живая сила будет по абсолютной системе мер $9,806p$, а по земной системе мер $\frac{9{,}806}{9{,}808}p$. Единица силы земной системы мер приблизительно в десять раз больше той же единицы в абсолютной системе мер; между единицами массы существует то же отношение. Данная работа или живая сила выражена в земной системе мер приблизительно в десять раз меньшим измерительным числом, чем в абсолютной.

Остается еще заметить, что вместо килограмма, как единицы массы, и метра, как единицы длины, в Англии часто употребляется грамм и сантиметр, а в Германии — миллиграмм и миллиметр. Получение этих мер и предыдущих, после приведенных выше рассуждений, никакой трудности не представляет. Таким образом, нам в механике, да и в других частях физики, тесно с ней соприкасающихся, приходится оперировать только тремя основными величинами — величинами пространства, времени и массы, что ведет к немаловажному упрощению и облегчению общего обзора.

3. Законы сохранения количества движения, сохранения центра тяжести и сохранения поверхностей

1. Хотя принципы Ньютона достаточны для решения всякой задачи механики, представляется все же целесообразным установить себе особые правила для чаще встречающихся случаев, которые дали бы нам возможность решать такие задачи по шаблону, не углубляясь в подробности. Сам Ньютон и последовавшие за ним ученые выработали несколько таких правил. Рассмотрим сначала правила Ньютона касательно *свободно движущихся* систем масс.

2. Если на две свободные массы m, m' действуют в направлении соединяющей их линии силы, исходящие из *других* масс, то в течение времени t вызываются скорости v, v' и существует следующее уравнение: $(p + p')t = mv + m'v'$. Оно получается из следующих двух уравнений: $pt = mv$ и $p't = m'v'$. Сумму $mv + m'v'$ мы называем *количеством движения* системы и *противоположным образом* направленные силы и скорости считаем *противоположными*. Когда же на массы m, m' действуют кроме *внешних* сил p, p' еще и *внутренние* силы, т. е. силы, с которыми эти массы действуют *друг на друга*, то эти силы будут равны и противоположны, q и $-q$. Сумма импульсов будет $(p+p'+q-q)t = (p+p')t$, т. е. та же самая, что и раньше, а следовательно, и все количество движения системы останется тем же самым. Количество движения системы определяется поэтому только *внешними* силами, т. е. такими, с которыми действуют на части системы, лежащие вне ее массы.

Представим себе несколько свободных масс m, m', m'' ... произвольно распределенными в пространстве. Пусть на них действуют произвольного направления внешние силы p, p', p'' ..., которые в течение времени t вызывают в массах соответственно скорости v, v', v'' .... Разложим все силы, как и скорости, по трем перпендикулярным друг к другу направлениям x, y, z. Сумма импульсов в направлении x равна произведенному количеству движения в направлении x и т. д. Если представим себе, что между массами m, m', m'' ... действуют еще попарно равные и противоположные внутренние силы q, $-q$, r, $-r$, s, $-s$ и т. д., то эти силы дают и во всяком направлении попарно равные и противоположные составляющие и потому не имеют никакого влияния на сумму импульсов. И здесь, следовательно, количество движения определяется только внешними силами. Этот закон называется *законом сохранения количества движения.*

Рис. 149

3. Другая форма того же закона, тоже найденная Ньютоном, называется законом *сохранения центра тяжести.* Представим себе в A и B (рис. 149) две массы $2m$ и m, взаимно действующие друг на друга; пусть они отталкиваются под действием электричества. Центр тяжести их лежит в S, причем $BS = 2AS$. Ускорения, которые они сообщают друг другу, противоположны и относятся друг к другу обратно пропорционально массам. Если, благодаря этому действию, масса $2m$ проходит путь AD, то масса m проходит путь $BC = 2AD$.

Точка S все еще остается центром тяжести, ибо $CS = 2DS$. Таким образом, две массы не могут своим *взаимодействием переместить* свой общий центр тяжести. Если рассматривать много как-нибудь распределенных в пространстве масс, то нетрудно заметить, что, так как каждая пара таких масс не в состоянии переместить своего общего центра тяжести, то и центр тяжести всей системы не может быть перемещен взаимодействием этих масс.

Представим себе теперь систему масс $m, m', m'' \ldots$ свободно в пространстве и пусть на них действуют какие-нибудь *внешние силы.* Мы относим эту систему к прямоугольной системе координат и обозначаем эти координаты соответственно x, y, z, x', y', z' и т. д. Координаты центра тяжести будут тогда

$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}, \quad \mu = \frac{\sum my}{\sum m}, \quad \zeta = \frac{\sum mz}{\sum m}.$$

В этих выражениях x, y, z могут изменяться равномерно или с равномерным ускорением, или каким-либо иным образом, смотря по тому, не действует ли на соответствующую массу никакая внешняя сила или на нее действует постоянная, или переменная внешняя сила. Центр тяжести будет в этих случаях двигаться различно и может в первом случае оставаться и в покое. Если сюда присоединяются еще *внутренние* силы, действующие между каждой парой масс, например, между массами m' и m'', то получаются противоположные перемещения w', w'' в направлении линии, соединяющей эти массы, так что, принимая во внимание знаки, получаем $m'w' + m''w'' = 0$. Если взять составляющие этих перемещений x_1 и x_2, то и здесь получим то же уравнение $m'x_1 + m''x_2$. Таким образом, внутренние силы вводят в выражения для ξ, η, ζ лишь такие добавления, которые взаимно уничтожают друг друга. Итак, *движение центра тяжести* какой-нибудь системы определяется только *внешними силами.*

Чтобы узнать ускорение центра тяжести всей системы, нам опять надо обратиться к ускорениям ее частей. Если φ, φ', φ'' … означают ускорения масс m, m', m'' … по какому-нибудь направлению, а Φ — ускорение центра тяжести в том же направлении, то мы имеем $\Phi = \dfrac{\sum m\varphi}{\sum m}$ или, если вся масса $\sum m = M$, $\Phi = \dfrac{\sum m\varphi}{M}$. Таким образом, чтобы получить ускорение центра тяжести в каком-либо направлении, нужно сложить все силы в том же направлении и сумму разделить на

всю массу системы. Центр тяжести системы движется так, как будто бы в нем были сосредоточены все массы и все силы. Как какая-нибудь масса без внешней силы не получает никакого ускорения, так и центр тяжести системы не имеет без внешних сил никакого ускорения.

4. Разберем несколько примеров для иллюстрации закона сохранения центра тяжести. Представим себе некоторое животное *свободно в мировом пространстве*. Если это животное двигает часть m своей массы в каком-нибудь направлении, то остальная масса его M передвигается в противоположном направлении так, что общий центр тяжести всего животного остается на том же месте. Если масса m снова движется обратно, то и масса M движется обратно. Без внешних опор или сил животное не в состоянии двигаться с места или изменить навязанное ему извне движение.

Легкоподвижная (на рельсах, например) вагонетка A нагружена камнями. Находящийся в ней человек выбрасывает из нее один камень за другим все в одном и том же направлении. Тогда, при достаточно малом трении, вся вагонетка начинает двигаться в противоположном направлении. Центр тяжести всей системы (вагонетка + камни) оставался бы на том же месте, если бы движение не уничтожалось внешними препятствиями. Если бы тот же человек получал камни извне, то вагонетка тоже пришла бы в движение, но не в той же мере, как в предыдущем случае, что будет выяснено на следующем примере.

Орудие массы M выбрасывает ядро массы m со скоростью v. Тогда масса M получает также скорость V и мы имеем, принимая во внимание знаки, $MV + mv = 0$. Этим объясняется явление, так называемого, обратного удара. Здесь $V = -\frac{m}{M}v$, т. е. при *равных* скоростях ядра обратный удар тем меньше, чем больше масса орудия сравнительно с массой ядра. Если работу пороха во всех случаях принять равной A, то живые силы определяются уравнением $\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = A$, а так как, согласно предыдущему уравнению, сумма величин движения $= 0$, то легко получить $V = \sqrt{\frac{2Am}{M(M+m)}}$. Следовательно, обратный удар исчезает, когда исчезает масса ядра, причем однако не принята во внимание масса пороховых газов. Если бы масса m не выбрасывалась орудием, а всасывалась бы им, то обратный удар имел бы противоположное направление. Но не хватило бы времени, чтобы обратный удар мог стать заметным, ибо масса m не успела бы пройти заметный путь, как она уже достигла бы конца трубки орудия. Но когда массы M и m связа-

ны между собою устойчивой связью, когда они находятся друг *относительно* друга в покое, должен наступить и *абсолютный* покой, ибо центр тяжести всей системы тоже находится в покое. По той же причине не может наступить заметное движение в случае приема камней в вагонетку в приведенном выше примере, ибо с наступлением устойчивой связи между вагонеткой и камнями созданные противоположные движения снова уничтожились бы. Орудие могло бы тогда лишь получить заметный обратный удар при всасывании своего ядра, если бы это последнее могло пролететь через него.

Когда значительные железные массы локомотива приходят в колебательное движение вместе с поршнем парового цилиндра, то тело этого локомотива, *свободно подвешенного* или покоящегося на рельсах с недостаточным трением, приходит, согласно закону центра тяжести, в колебательное движение противоположного направления, что может оказаться очень вредным для равномерного хода локомотива. Это колебание может быть устранено, если позаботиться о том, чтобы движение движимых поршнем железных масс настолько уравновешивалось противоположным движением других масс, что центр тяжести всей системы без движения тела локомотива мог бы оставаться на том же месте. Достигается это помещением масс на колесах локомотива.

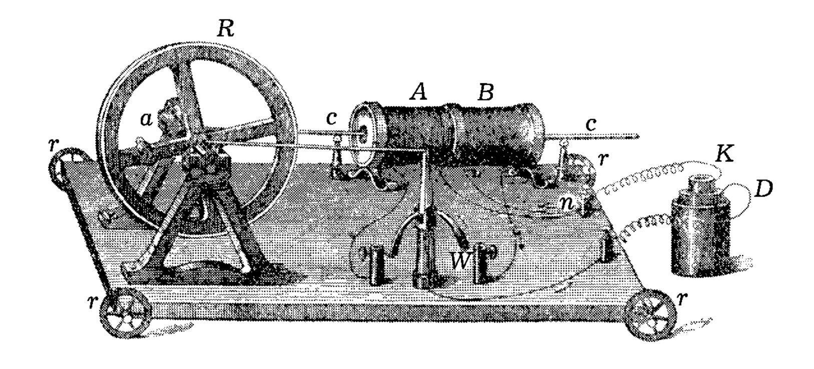


Рис. 150

Существующие здесь отношения очень хорошо могут быть иллюстрированы на электромоторе Педжа, изображенном на рис. 150. Когда железный стержень в катушке AB движется под действием внутренних сил, действующих между катушкой и стержнем, вправо, то тело

мотора движется влево, если только оно с легкой подвижностью покоится на колесиках rr. Но если поместить на спице махового колеса R соответствующий подвижной груз a, движущийся всегда в направлении, противоположном движению железного стержня, то можно совершенно уничтожить движение мотора.

О движении частей разрывающейся бомбы нам не известно ничего. Но на основании закона о центре тяжести ясно, что, если отвлечься от сопротивления воздуха и сопротивлений, на которые натыкаются отдельные части, общий центр тяжести после разрыва бомбы продолжает описывать в своем движении параболу, как всякое брошенное тело.

5. Родственен закону центра тяжести другой закон, обязательный для *свободной* системы, именно *закон сохранения поверхностей.* Хотя Ньютон имел этот закон, так сказать, уже в руках, тем не менее он был высказан гораздо позже Эйлером, д'Арси и Даниелем Бернулли. Эйлер и Даниель Бернулли нашли этот закон почти одновременно (1746) при обсуждении предложенной Эйлером задачи касательно движения шаров во вращающихся трубках, когда они обратили внимание на действие и противодействие шаров и трубок. Д'Арси (1747) взял исходным пунктом своих исследований исследования Ньютона и обобщил закон секторов, которым пользовался этот последний для объяснения законов Кеплера.

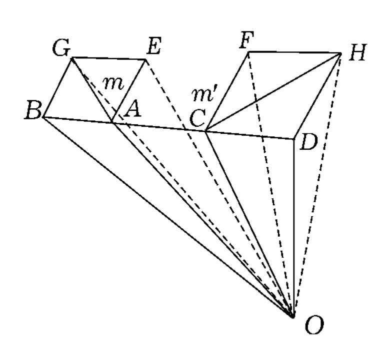


Рис. 151

Рассмотрим две массы m, m', находящиеся во взаимодействии. Пусть эти массы *только* вследствие этого взаимодействия проходят пути AB, CD в направлении соединяющей их линии. Если принять в соображение знак движений, мы имеем $m \cdot AB + m' \cdot CD = 0$. Если из какой-нибудь точки O провести к движущимся массам радиус-векторы и рассматривать описанные ими в противоположном направлении поверхности с противоположными знаками, мы получим также $m \cdot OAB + m' \cdot OCD = 0$. Если две массы находятся во взаимодействии и из какой-либо точки проводят к ним радиус-векторы, то вследствие этого взаимодействия сумма описанных ими поверхностей, помноженных на соответствующие массы $= 0$. Если бы на массы действовали еще также внешние силы

и если бы вследствие этого были описаны поверхности OAE и OCF, то совместное действие внутренних и внешних сил (в течение очень короткого времени) дало бы поверхности OAG и OCH. Но из правила параллелограмма Вариньона следует, что $m \cdot OAG + m' \cdot OCH = m \cdot OAE + m' \cdot OCF + m \cdot OAB + m' \cdot OCD = m \cdot OAE + m' \cdot OCF$, т. е. *сумма произведений из описанных поверхностей на соответствующие массы внутренними силами не изменяется.*

Если у нас много масс, то то же самое можно утверждать для каждой пары масс о проекции всего процесса движения на какую-нибудь данную плоскость. Если из какой-нибудь точки провести к массам какой-нибудь системы радиус-векторы и проецировать описанные поверхности на какую-нибудь данную плоскость, то сумма этих поверхностей, помноженных на соответствующие массы, не зависит от внутренних сил. Это и есть *закон сохранения поверхностей.*

Возьмем одну только массу, которая без действия силы движется равномерно и прямолинейно. Если из какой-нибудь точки 0 провести к ней радиус-вектор, то описанная им поверхность возрастает пропорционально времени. Тот же закон обязателен и для $\sum mf$ в случае движения многих масс без действия сил; выражение суммы означает здесь алгебраическую сумму всех произведений из описанных радиус-векторами поверхностей на соответствующие массы, и мы это назовем суммой поверхностей. Если сюда присоединяется действие *внутренних* сил, действующих между массами системы, то этим описанное здесь отношение не изменяется. Оно сохраняется также и тогда еще, когда сюда присоединяется действие *внешних сил*, если они все направлены к *неподвижной точке* O, как мы это знаем из исследований Ньютона.

Если на массу действует внешняя сила, то описанная радиусом-вектором поверхность f возрастает со временем, согласно закону $f = \frac{at^2}{2} + bt + c$, где a зависит от ускорительной силы, b — от начальной скорости и c — от начального положения массы. По тому же закону возрастает сумма $\sum mf$, когда налицо несколько масс, находящихся под действием внешних ускорительных сил, покуда эти последние могут рассматриваться, как постоянные, что бывает всегда возможно при достаточно кратких промежутках времени. Закон поверхностей заключается в этом случае в том, что возрастание суммы этих поверхностей *совершенно не зависит* от *внутренних* сил системы.

Свободное твердое тело мы можем рассматривать, как систему, части которой сохраняются в относительном своем положении внутрен-

ними силами. Принцип поверхностей находит, следовательно, и здесь свое применение. Простой пример этого представляет равномерное вращение твердого тела около оси, проходящей через его центр тяжести. Если m означает часть его массы, r — расстояние этой части от оси и a — угловую скорость, то в этом случае сумма описанных в единицу времени поверхностей будет $\sum m\frac{r}{2}ra = \frac{a}{2}\sum mr^2$, т.е. произведение из момента инерции на половину угловой скорости. Произведение это может изменяться только под действием внешних сил.

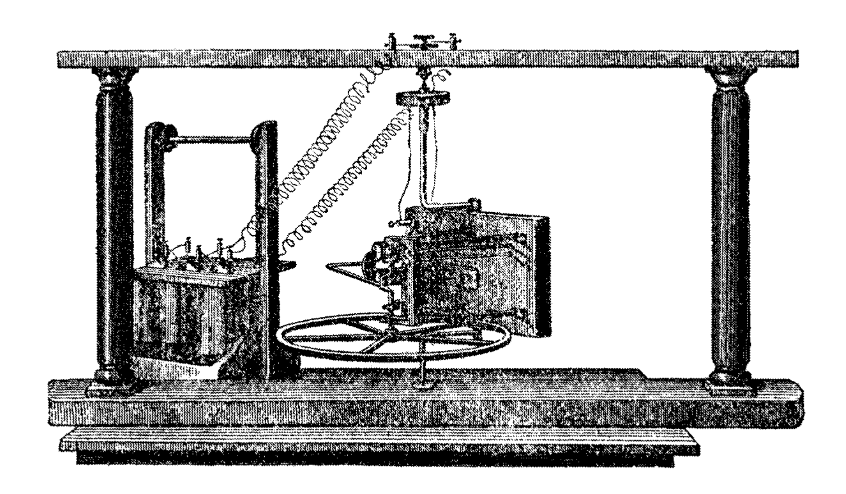


Рис. 152

6. Рассмотрим теперь несколько примеров для иллюстрации закона поверхностей. Если два твердых тела K и K' связаны между собою и K под действием внутренних сил, действующих между K и K', начинает вращаться относительно K', то сейчас же начинает вращаться и К, но в противоположном направлении. Вследствие вращения тела K сумма поверхностей возрастает и это приращение должно быть компенсировано, согласно закону поверхностей, противоположной суммой поверхностей, исходящих из K'. Это очень хорошо удается показать на любом электромоторе, если укрепить его вместе с горизонтально помещенным маховым колесом так, чтобы он мог свободно вращаться около вертикальной оси. Приводящие к нему электрический ток проволоки погружены в двух сделанных на оси вращения желобках с рту-

тью так, что они вращению не мешают. Привязывают мотор K' ниткой к штативу оси и заставляют действовать ток. Как только маховое колесо K начинает вращаться, если смотреть на него сверху, в направлении часовой стрелки, нить *натягивается* и мотор обнаруживает стремление *вращаться в противоположную сторону*, и он сейчас же и начинает быстро вращаться, если только пережечь нить.

Мотор с точки зрения вращения вокруг оси есть свободная система. В случае покоя сумма поверхностей $= 0$. Но когда колесо начинает вращаться под действием внутренних электромагнитных сил между якорем и массой железа, то образующиеся вследствие этого суммы поверхностей компенсируются *обратным движением тела мотора*, так как вся сумма должна быть $= 0$. Если прикрепить к телу мотора стрелку, удерживаемую упругой пружиной в определенном положении, то вращение тела мотора наступить не может. Но всякое ускорение колеса в направлении часовой стрелки (при более глубоком погружении батареи) вызывает отклонение стрелки в противоположную сторону, а всякое замедление — обратное отклонение.

Красивое и своеобразное явление наблюдается, если прервать ток на свободно вращающемся моторе. Сначала колесо и мотор продолжают двигаться в обратном направлении. Вскоре однако становится заметным действие трения и мало-помалу наступает относительный покой частей мотора друг относительно друга. Движение мотора становится при этом все медленнее, на один момент происходит полная остановка и, наконец, когда наступит относительный покой, мотор начинает двигаться в том направлении, в котором с самого же начала вращалось колесо, т. е. движение его становится обратным. *Весь* мотор вращается тогда так, как с самого же начала вращалось колесо. Объяснить это явление нетрудно. Мотор не есть *совершенно* свободная система, а его движению препятствует трение около оси. Будь это совершенно свободная система, сумма поверхностей должна была бы тотчас стать равной нулю, как только части снова пришли в относительный покой. Здесь же действует еще в качестве внешней силы трение около оси. Трение около оси колеса уменьшает равным образом суммы поверхностей колеса и тела. Трение же около оси тела уменьшает только сумму поверхностей тела. В колесе, следовательно, сохраняется еще некоторый излишек суммы поверхностей, который при относительном покое частей и становится заметным на всем моторе. Весь процесс, вызванный перерывом тока, представляет нам картину того, что, согласно предположениям

астрономов, произошло на Луне. Возбуждаемая Землей приливная волна действием трения настолько уменьшила скорость вращения Луны, что продолжительность дня на Луне возросла до одного месяца. Маховое колесо изображает массу воды, приведенную в движение приливом.

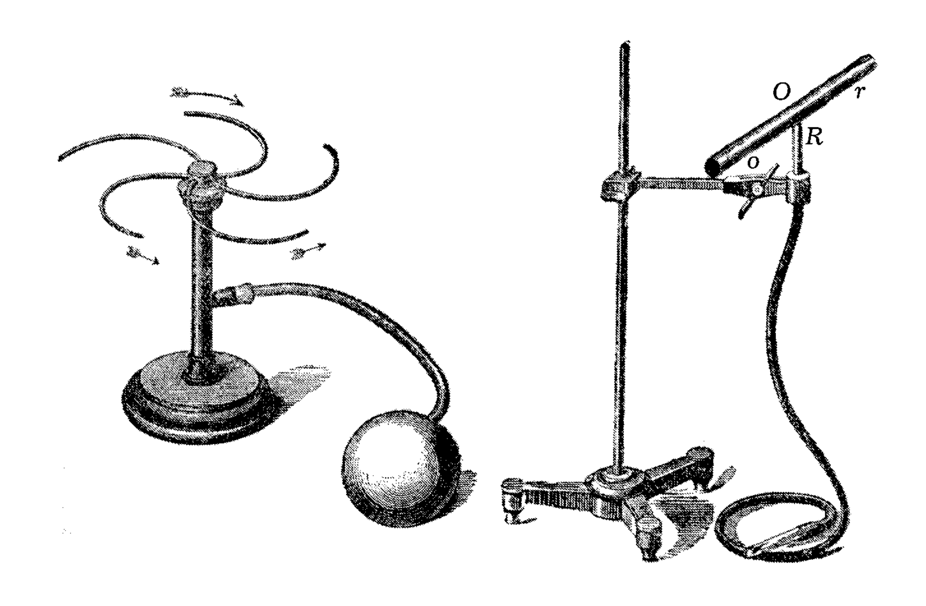


Рис. 153a Рис. 153b

Другой пример закона поверхностей представляют *реакционные колеса*. Когда через трубки (рис. 153a) истекает воздух или светильный газ в направлении короткой стрелки, все колесо начинает вращаться в направлении большой стрелки. На рис. 153b изображено другое, простое реакционное колесо. Это колесо можно получить, если поместить закрытую с обеих сторон пробкой и соответственным образом продырявленную латунную трубку rr на вторую латунную трубку R, снабженную острием; в эту вторую трубку вдувается воздух, который выходит через отверстия O, O'.

Легко можно было бы подумать, что при *всасывании* должно наступить *обратное* движение реакционных колес, чем при вдувании воздуха. В действительности этого, однако, обыкновенно не бывает, что не трудно и объяснить. Воздух, всасываемый в спицы колеса, должен сей-

час участвовать в движении колеса, должен оказаться в относительном покое по отношению к колесу, и сумма поверхностей всей системы может стать равной нулю только тогда, когда система остается в покое. При всасывании никакого заметного вращения обыкновенно не наблюдается. Здесь происходит то же самое, что происходит при обратном ударе в случае всасывания ядра трубкой орудия. Если поэтому упругий шар соединить с *единственной* трубкой, соединенной с колесом, как это изображено на рис. 153а, и периодически надавливать шар так, чтобы попеременно вдувалось и всасывалось *одно и то же* количество воздуха, то колесо вращается в том же направлении, как и при вдувании воздуха. Происходит это, с одной стороны, от того, что всасываемый воздух, попадая в спицы колеса, должен участвовать в движении последних и потому не может вызвать обратного вращения, а с другой стороны, вследствие различного движения внешнего воздуха при вдувании и всасывании. При вдувании воздух расходится лучами (участвуя во вращении). При всасывании воздух притекает со всех сторон без всякого вращения

Что это объяснение правильно, доказать нетрудно. Если пробуравить нижнее основание полого цилиндра, закрытой бумажной коробки например, и поместить цилиндр на острие трубки R, взрезав и отогнув верхний слой так, как указано на рис. 154, то этот цилиндр при вдувании воздуха вращается в направлении большой стрелки, а при высасывании его — в направлении меньшей стрелки. Поступая в цилиндр, воздух может и здесь *свободно* продолжать вращение, вследствие чего это последнее и компенсируется обратным вращением.

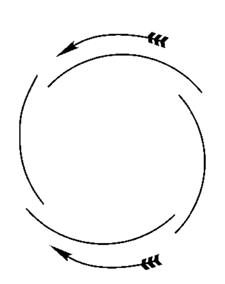


Рис. 154

7. Нечто подобное же мы имеем и в следующем случае. Представим себе трубку (рис. 155а), которая имеет прямое направление по ab, затем изгибается под прямым углом в направлении bc, описывает круг $cdef$, плоскость которого перпендикулярна к ab, а центр лежит в b, потом направляется по линии fg и, наконец, продолжая линию ab, направляется по gh. Вся трубка может вращаться около ah, как оси. Если налить в эту трубку жидкость (как это изображено на рис. 155b), которая течет в направлении $cdef$, то трубка сейчас же начи-

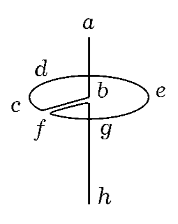


Рис. 155а

нает вращаться в направлении $fedc$. Но этот импульс отпадает, как только жидкость достигает точки f и, протекая по радиусу fg, должна участвовать в его движении. Поэтому вращение трубки сейчас же прекращается, если употребить постоянный ток жидкости. Но как только ток жидкости прекращается, то стекающая через радиус fg жидкость сообщает трубке двигательный импульс в направлении собственного движения по $cdef$. Все эти явления легко понять с точки зрения закона поверхностей.

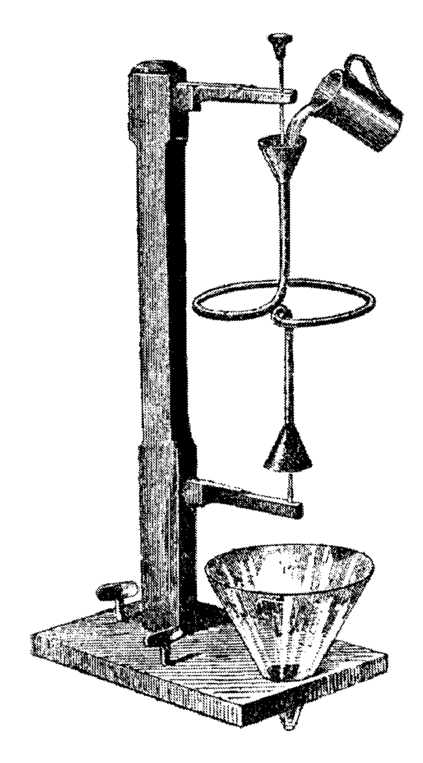


Рис. 155b

Примерами этого закона могут служить пассатные ветры, отклонения морских течений, течений рек, опыт с маятником Фуко и т. д. Прекрасно обнаруживается еще закон поверхностей на телах с переменным моментом инерции. Если тело с моментом инерции Θ вращается с угловой скоростью α и под действием внутренних сил, например, пружин, момент инерции переходит в Θ', то и α переходит в α', причем $\alpha\Theta = \alpha'\Theta'$ и, следовательно, $\alpha' = \alpha\frac{\Theta}{\Theta'}$. При достаточном уменьшении момента инерции можно получить значительное увеличение угловой скорости. Принцип этот можно, пожалуй, применить для демонстрации *вращения Земли* вместо способа Фуко.

Другой процесс, соответствующий приведенной здесь схеме, заключается в следующем. Быстро наполняют жидкостью стеклянную воронку с вертикально помещенной осью, но так чтобы струя попадала не на ось, а на боковую стенку. Вследствие этого начинается медленное вращение в жидкости, которое, однако, не замечается, покуда воронка полна. Но когда жидкость уходит в горлышко воронки, то ее момент инерции настолько уменьшается, а ее угловая скорость настолько возрастает, что образуется

сильный водоворот с углублением около оси. Часто вся вытекающая струя жидкости сопровождается воздушной трубкой вокруг оси.

8. Если внимательно присмотреться к изложенным здесь законам центра тяжести и поверхностей, то в обоих легко усмотреть лишь удобные для применениz формы выражения *известного* свойства механических процессов. Ускорению φ какой-нибудь массы m соответствует всегда противоположное ускорение φ' другой массы m', причем, принимая во внимание знаки, $m\varphi + m'\varphi' = 0$. Силе $m\varphi$ соответствует равная и противоположно направленная сила $m'\varphi'$. Когда массы m и $2m$ проходят пути $2w$ и w с противоположно направленными ускорениями 2φ и φ, то центр тяжести их S остается неперемещенным и сумма поверхностей относительно произвольной точки O есть, принимая во внимание знаки, $2m \cdot f + m \cdot 2f = 0$. Из этого простого рассуждения ясно, что закон центра тяжести выражает *то же самое* в отношении *параллельных координат*, что закон поверхностей выражает в отношении *полярных координат*. Оба они выражают только факт обратного действия.

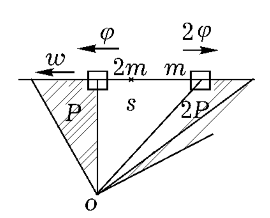


Рис. 156

Можно еще законам центра тяжести и поверхностей придать другой простой смысл. Как тело без внешних сил и, следовательно, без помощи другого тела не может изменить своего равномерного поступательного движения или вращении, так и система тел, выражаясь кратко (и — после данных объяснений — общепонятно), не может изменить своей *средней* скорости поступательного движения или вращения без помощи другой системы, на которую первая, так сказать, опирается. Таким образом, оба закона представляют собой *более общее выражение закона инерции*, правильность которого в этой форме не только *очевидна*, но и *чувствуется*.

Это чувство вовсе не ненаучно и не служит помехой. Там, где оно не *замещает* отвлеченного понимания, но существует *рядом* с ним, оно собственно является основой *полного* обладания фактами механики. Как было указано уже в другом месте, мы сами со всем нашим организмом представляем собою кусок механики, глубоко вторгающийся в нашу психическую жизнь[1]. Никто нас не убедит в том, что научной меха-

[1]E. Mach. «Grundlinien der Lehre von den Bewegungsempfindungen» (Leipzig, Engelmann, 1875).



Портрет Маркуса Марци

нике дела нет до механически-физиологических процессов, до соответственных чувств и инстинктов. Кто знает такие законы, как законы центра тяжести и поверхностей, только в их абстрактной математической форме, кто не занимался осязательными простыми фактами, которые, с одной стороны, представляют собой применение этих законов, а с другой стороны, именно *привели* к их провозглашению, тот может понять их только наполовину и едва ли будет познавать действительные процессы, как примеры теории. Такой человек находится в положении человека, вдруг оказавшегося на вершине башни, окрестность которой ему незнакома, вследствие чего он едва в состоянии оценить значение видимых объектов.

4. Законы удара

1. Законы удара, с одной стороны, дали повод к установлению важнейших принципов механики, а с другой стороны, дали первые примеры применения этих принципов. Уже современник Галилея, пражский профессор Marcus Marci (род. 1595) обнародовал в своем сочинении «De proportione motus» некоторые результаты своих исследований о явлениях удара тел. Он знал, что тело, ударившись упругим ударом о другое равное и покоящееся тело, теряет свое движение, сообщая его другому телу. Выставляет он еще и другие положения, правильные еще и в настоящее время, хотя, правда, с недостаточной определенностью и вперемежку с положениями неправильными. Marcus Marci был странным человеком. Он имел весьма примечательные для своего времени представления о сложении движений и «импульсов». В образовании этих представлений он идет сходным путем, каким впоследствии шел Роберваль. Он говорит о *частично* равных и противоположных и о *вполне* противоположных движениях, дает построение параллелограмма и т. д., но не может вполне уяснить себе понятие силы, а следовательно, и сложение сил, хотя и говорит об ускоренном движении падающего тела. При всем том он знает правило Галилея о хордах в круге, некоторые правила относительно движения маятника, знает центробежную силу и т. д. Хотя сочинение Галилея было обнародовано годом раньше, тем не менее ввиду тогдашнего положения вещей в Средней Европе, созданного тридцатилетней войной, трудно допустить, чтобы оно было известно Marci. Будь оно ему известно, были бы, во-первых, совершенно непонятны многие неправильности в книге Marci, а во-вторых, оставалось бы выяснить, как могло случиться, что Marci еще в 1648 году в сочинении, служащем продолжением той книги, должен был защищать теорему о хордах в круге против иезуита Вальтасара Конрада. Все это объясняется однако очень просто, если принять, что Marci, как человек обширных знаний, был знаком с работами Бенедетти, и если принять, как это делает Wohlwill (Zeitschr. für Völkerpsych., 1884, XV, стр. 387), что он был знаком с более старыми работами Галилея, в которых этот последний сам еще не добился полной ясности. Если мы еще вспомним, что Marci был также близок к открытию сложного состава света, сделанному Ньютоном, мы должны будем в нем признать человека выдающихся задатков. Его сочинения представляют собой интересный и мало еще изученный объект исторических исследований в области физики.

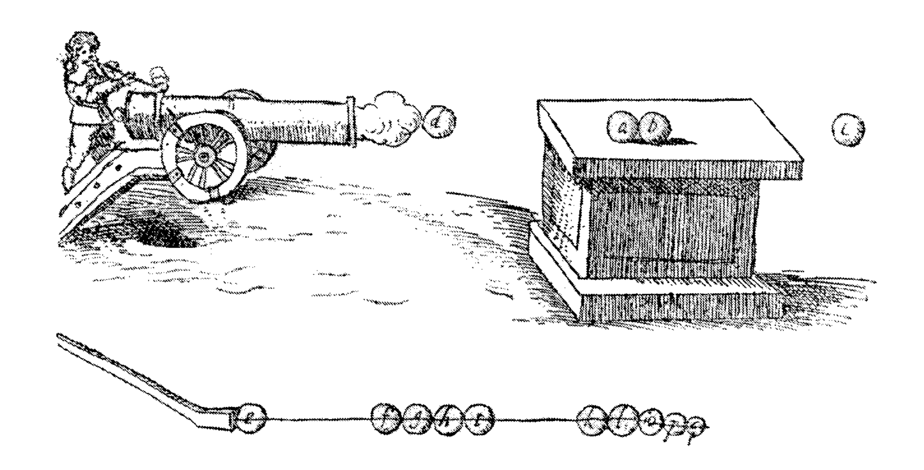


Рисунок из книги Marci: «De proportione motus»

2. Сам Галилей предпринял несколько опытов для выяснения законов удара тел, но это ему не удалось вполне. Он занимается изучением силы движущегося тела или «силы удара», как он выражается. Он пытается сравнить ее с давлением покоящегося груза, измерить ее этим давлением. Для этой цели он устраивает чрезвычайно остроумный опыт, заключающийся в следующем.

К сосуду с водой I с отверстием на дне, закрытым пробкой, подвешен при помощи нитей второй сосуд II и все вместе прикреплено к весам, на которых установлено равновесие. Если удалить пробку из отверстия в дне первого сосуда, то жидкость падает струей из сосуда I в сосуд II. Часть покоящегося груза отпадает и заменяется действием удара на сосуд II. Галилей ожидал отклонения стрелки весов и надеялся при помощи груза, который установил бы опять равновесие, определить действие удара. Он был несколько изумлен, когда не получил *никакого* отклонения стрелки, и, по-видимому, не сумел вполне объяснить себе это явление.

3. В настоящее время объяснить его, конечно, нетрудно. С одной стороны, с удалением пробки происходит уменьшение давления. Во-первых, исключается вес струи жидкости, находящейся в воздухе, и, во-вторых, должно быть принято во внимание обратное давление вверх вытекающей струи на сосуд I (который находится в положении сегнерова колеса). С другой же стороны наступает, в-третьих, увели-

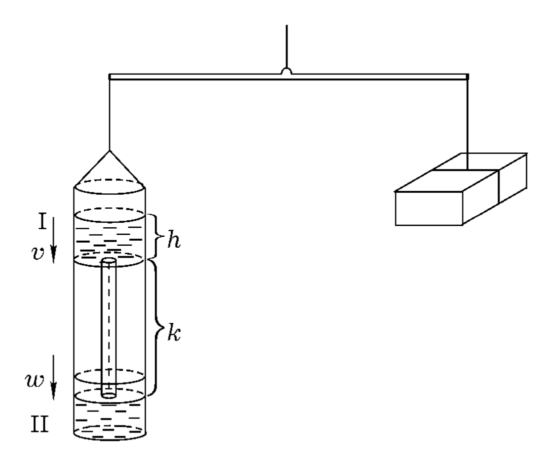


Рис. 157

чение давления вследствие действия струи на дно сосуда II. До того момента, как первая капля достигла дна сосуда II, мы имеем только уменьшение давления, которое однако сейчас же компенсируется, как только аппарат в полном ходу. Вот это *начальное* отклонение стрелки и было все, что мог заметить Галилей. Представим себе аппарат в ходу, обозначим высоту жидкости в сосуде I буквой h, соответствующую скорость истечения буквой v, расстояние дна сосуда I от уровня жидкости в сосуде II буквой k, скорость струи у этого уровня буквой w, поверхность отверстия в дне сосуда буквой a, ускорение тяжести буквой g и удельный вес жидкости буквой s. Чтобы определить первый член суммы, мы заметим, что v соответствует достигнутой скорости падения с высоты h. Мы можем просто представить себе, что это движение падения продолжается еще на расстоянии k. Время падения струи от I до II есть, следовательно, время падения вдоль $h + k$ минус время падения вдоль h. В течение этого времени истекает цилиндр жидкости с основанием a и скоростью v. Первый член суммы или вес струи жидкости, находящейся в воздухе, равен, следовательно,

$$\sqrt{2gh}\left[\sqrt{\frac{2(h+k)}{g}}-\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]as.$$

Для определения второго члена суммы мы воспользуемся известным уравнением $mv = pt$. Если примем $t = 1$, то $mv = p$, т. е. обрат-

ное давление вверх на сосуд I равно количеству движения, сообщенного струе жидкости в единицу времени. Выберем здесь в качестве единицы силы единицу веса, т. е. воспользуемся земной системой мер. Мы получаем тогда для второго члена суммы выражение $\left(av\frac{s}{g}\right)v = p$, причем выражение, заключенное в скобках, означает вытекающую в единицу времени массу, или

$$a\sqrt{2gh}\cdot\frac{s}{g}\cdot\sqrt{2gh} = 2ahs.$$

Аналогичным образом мы находим давление q на сосуд II $\left(av\frac{s}{g}\right)w = q$, или третий член суммы

$$a\frac{s}{g}\sqrt{2gh}\sqrt{2g(h+k)}.$$

Таким образом, все давление изменяется на следующую величину:

$$-\sqrt{2gh}\left[\sqrt{\frac{2(h+k)}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right]as - 2ahs + \frac{as}{g}\sqrt{2gh}\sqrt{2g(h+k)}$$

или сокращенно:

$$-2as[\sqrt{h(h+k)} - h] - 2ahs + 2as\sqrt{h(h+k)}.$$

Эти три члена в сумме *совершенно* сокращаются, и потому Галилей и не мог не получить *отрицательного* результата.

Относительно второго члена нашей суммы нам нужно прибавить еще одно краткое замечание. Можно было бы подумать, что то давление на отверстие в дне сосуда, которое выпадает, есть ahs, но не $2ahs$. Но это *статическое* понимание было бы совершенно неуместно в этом *динамическом* случае. Скорость v не создается мгновенно в вытекающих частицах жидкости действием тяжести, а она соответствует взаимному давлению истекающих и остающихся частей жидкости и давление может быть определено только из развитой величины движения. Если бы в расчеты была введена величина ahs, то эта ошибка сейчас обнаружилась бы, так как возникли бы противоречия.

Если бы эксперименты Галилея были менее элегантны, ему без труда удалось бы определить давление непрерывной струи жидкости. Но действие мгновенного *удара* ему никогда не удалось бы устранить *давлением*, и это ему скоро стало ясно. Представим себе вместе с Галилеем

свободно падающее тяжелое тело. Конечная скорость его пропорциональна времени падения. Даже *мельчайшая* скорость требует для своего возникновения известного *времени* (правило, которое оспаривал еще Мариотт). Представим себе тело, обладающее скоростью, направленной вертикально вверх. В зависимости от этой скорости оно известное время поднимается вверх и проходит, следовательно, известное расстояние. Самое тяжелое тело, обладающее наименьшей скоростью, направленной вертикально вверх, поднимается вверх, хотя бы и очень мало, в направлении, обратном действию силы тяжести. Поэтому, если какое-нибудь тело, как бы оно ни было тяжело, получает мгновенный удар вверх от другого тела, хотя бы и весьма малого, движущегося с произвольно малой скоростью и сообщающего ему очень малую скорость, то оно все же поддается и хоть немного, но движется вверх. Таким образом, *мельчайший* удар может победить *величайшее* давление или, как выражается Галилей, сила удара сравнительно с силой давления *бесконечно велика*. Этот результат, который порой приводится в доказательство неясности, существовавшей у Галилея, есть, напротив того, блестящее доказательство глубины его понимания. В настоящее время мы сказали бы, что сила удара, момент, импульс, величина движения mv есть величина другого *измерения*, чем давление p. Измерение первого есть mlt^{-1}, а измерение последнего есть mlt^{-2}. Таким образом, в действительности давление относится к моменту удара, как линия к поверхности. Давление есть p, а момент удара pt. Без математических терминов вряд ли можно выразиться лучше, чем это сделал Галилей. Вместе с тем мы теперь видим, почему можно в действительности измерять удар непрерывной струи жидкости *давлением*. Мы сравниваем уничтоженную в секунду величину движения с действующим в течение секунды давлением, т. е. мы сравниваем *однородные* величины типа pt.

4. Первое более подробное исследование законов удара было предпринято в 1668 году по предложению королевского общества в Лондоне. На предложение этого общества откликнулись три выдающихся физика, Wallis (26 ноября, 1668), Wren (17 декабря, 1668) и Гюйгенс (4 января, 1669), предложив работы, в которых они независимо друг от друга изложили (без выводов однако) законы удара тел. Wallis исследовал только удар неупругих тел, а Wren и Гюйгенс — только удар упругих тел. Положения Wren'а по существу совпадали с положениями Гюйгенса, и до обнародования он проверил их на опыте. Вот на

эти-то опыты ссылался Ньютон при установлении своих принципов. Те же опыты были вскоре затем в более распространенной форме описаны в особом сочинении «Sur le choc des corps» («Об ударе тел») Мариоттом. Он же указал и аппарат, который и в настоящее время еще находится в физических лабораториях и известен под именем *ударной машины.*

Wallis исходит из того основного положения, что в явлении удара решающее значение имеет *момент*, произведение из массы (pondus) на скорость (celeritas). Этим моментом определяется сила удара. Если два (неупругих) тела ударяются друг о друга с *равными* моментами, то после удара наступает покой. В случае моментов неравных разность моментов дает момент после удара. Если разделить этот момент на сумму масс, получают скорость движения после удара. Впоследствии Wallis изложил свое учение об ударе тел в другом сочинении «Mechanika sive de motn» («Механика или учение о движении»). Все относящиеся сюда правила можно в настоящее время объединить в одну общеупотребительную формулу $u = \dfrac{mv + m'v'}{m + m'}$, в которой m, m' означают массы, v, v' — скорости этих последних до удара и u — скорость после удара.

5. Мысли, которыми руководствовался Гюйгенс, ясно вытекают из его обнародованного впоследствии сочинения «De motu corporum ex percussione» («О движении тел после удара»). Рассмотрим их несколько ближе. Предпосылки, из которых исходит Гюйгенс, сводятся к следующему: 1. закон инерции; 2. упругие тела равных масс, сталкивающиеся с равными, но противоположными скоростями, расходятся с теми же самыми скоростями; 3. все скорости определяются только относительно; 4. большее тело, ударяющееся о покоящееся меньшее тело, сообщает этому последнему некоторую часть своей скорости и, наконец, 5. если *одно* из ударяющихся тел сохраняет свою скорость, то сохраняет свою и *другое* тело.

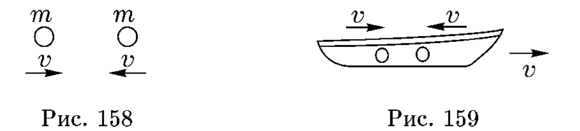


Рис. 158 Рис. 159

Представим себе сначала вместе с Гюйгенсом две равные и упругие массы, сталкивающиеся с равными и противоположно направленными скоростями v. После удара они отскакивают друг от друга с теми же скоростями. Гюйгенс прав, когда он этот случай не *выводит*, а *исходит*

из него. Что существуют упругие тела, которые после удара восстановляют свою форму, что при этом не пропадает заметная живая сила, этому может научить только опыт. Гюйгенс и представляет себе, что описанный здесь процесс происходит в лодке, которая сама движется со скоростью v. Для наблюдателя, находящегося в лодке, предыдущий случай продолжает существовать, между тем как для наблюдателя, находящегося на берегу, скорости шаров будут до удара соответственно $2v$ и 0, а после удара 0 и $2v$. Таким образом, упругое тело, ударившись о другое тело равной массы, находящееся в покое, сообщает ему всю свою скорость и само после удара остается в покое. Если сообщить лодке произвольную скорость u, то для наблюдателя на берегу скорости до удара будут соответственно $u+v$ и $u-v$, а после удара $u-v$ и $u+v$. Так как $u+v$ и $u-v$ могут иметь *произвольные* значения, то можно утверждать, что равные упругие массы, ударившись друг о друга, *обмениваются* своими скоростями.

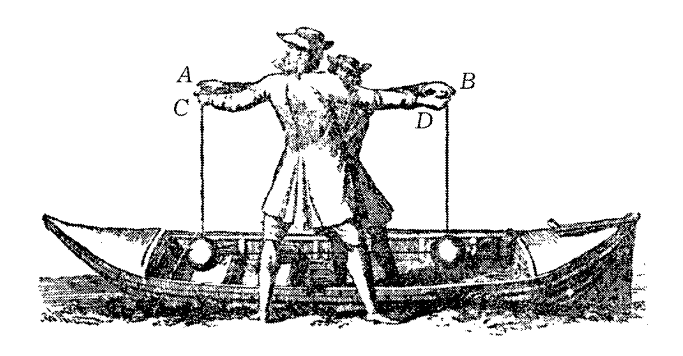


Рисунок из сочинения Гюйгенса «De percussione»

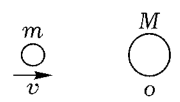


Рис. 160

Как доказал уже Галилей, величайшее покоящееся тело может быть приведено в движение ударом мельчайшего тела. Гюйгенс же доказывает, что *приближение* до удара и *удаление* тела после удара происходит с *одной и той же относительной скоростью.* Пусть тело m ударяется о покоящееся тело с массой M, которому оно и сообщает в ударе неопределенную еще скорость w. Для доказательства своего правила Гюйгенс принимает, что процесс происходит в лодке, которая со скоростью $\frac{w}{2}$ движется от M к m. Начальные скорости

будут тогда $v - \frac{w}{2}$ и $-\frac{w}{2}$, а конечные скорости x и $+\frac{w}{2}$. Так как величина скорости массы M не изменилась, а изменился только ее знак, то и в скорости массы m должен измениться *только* знак, если при ударе упругих тел живая сила не пропадает. Вследствие этого конечные скорости будут $-(v - \frac{w}{2})$ и $+\frac{w}{2}$. Таким образом, относительная скорость приближения до удара на самом деле равна относительной скорости удаления после удара. Как бы ни изменилась скорость тела, можно всегда при помощи фикции движения лодки считать величину скорости до и после удара, независимо от ее знака, не изменившейся. Таким образом, правило это имеет общее значение.

Если сталкиваются две массы M и m со скоростями V и v, *обратно пропорциональными массам*, то масса M отскакивает со скоростью V, а масса m — со скоростью v. Если допустим, что скорости после удара будут V_1 и v_1, то все же остается, согласно предыдущему правилу, $V + v = V_1 + v_1$ и, согласно правилу живых сил,

$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2}.$$

Если примем, что $v_1 = v + w$, то $V_1 = V - w$, а сумма будет

$$\frac{MV_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + (M + m)\frac{w^2}{2}.$$

Равенство может быть восстановлено только тогда, когда принимается, что $w = 0$, чем и обосновывается упомянутое правило. Гюйгенс доказывает это конструктивно, сравнением возможных высот поднятия тел до и после удара. Если скорости удара не обратно пропорциональны массам, то это условие может быть создано фикцией соответствующего движения лодки, так что правило это охватывает какой угодно произвольный случай.

Принцип сохранения живой силы при ударе тел Гюйгенс высказывает в одном из последних своих положений (11), которое он послал Лондонскому обществу несколько позже других, хотя это положение, несомненно, лежит уже в основе предыдущих.

6. Когда мы приступаем к изучению какого-нибудь процесса A, положение наше может быть двоякое. Может случиться, что мы знали уже элементы его из другого процесса B. Тогда изучение процесса A представляет собой только применение известных нам уже принципов.

Но может случиться и так, что мы начали исследование процесса A и, так как природа вполне однородна, возможно установить эти принципы лишь на этом процессе A. Так как процессы удара тел были изучены одновременно с другими механическими процессами, то действительно в распоряжении исследователей оказались оба метода познания.

Прежде всего мы можем убедиться в том, что процессы при ударе тел могут быть выяснены с помощью принципов Ньютона, к установлению которых изучение этих процессов, правда, содействовало, но которые вовсе не покоятся на одной этой основе, и с помощью минимума *нового* опыта. Новый опыт, не стоящий в связи с принципами Ньютона, учит нас только тому, что существуют тела *неупругие* и *упругие*. Первые изменяют свою форму под действием давления и с прекращением этого давления не восстановляют ее; во вторых *каждой форме тела* соответствует всегда *определенная* система давления, так что каждое изменение формы связано с изменением давления и наоборот. Упругие тела восстановляют свою форму. Силы, изменяющие форму тел, начинают действовать только после прикосновение к ним.

Рассмотрим две неупругие массы M и m, движущиеся соответственно со скоростями V и v. Когда они взаимно соприкасаются с этими неравными скоростями, то в системе M, m пробуждаются внутренние силы, *изменяющие форму тел*. Силы эти не изменяют количества движения и не перемещают также центра системы. С установлением равных скоростей изменения формы прекращаются и в *неупругих* телах исчезают изменяющие форму тел силы. Отсюда следует, что общая скорость u движения тел после удара может быть получена из уравнения: $Mu + mu = MV + mv$ или $u = \frac{MV + mv}{M + m}$, т. е. по правилу Wallis'a.

Допустим теперь, что мы наблюдаем процессы при ударе тел, не зная еще принципов Ньютона. Мы очень скоро замечаем, что при ударе имеет значение не только *скорость*, но еще *другой* признак тела (вес, тяжесть, масса, pondus, moles, massa). Как только мы это заметим, нам не трудно разрешить простейший случай. Если два тела равного веса или равной массы сталкиваются с равными и противоположными скоростями, если далее они после удара не расстаются более, а получают одну общую скорость, то единственная *однозначно* определенная скорость после удара есть скорость 0. Стоит нам заметить, что процесс удара зависит только от *разности* скоростей, т. е., следовательно, только от относительной скорости, чтобы при помощи фикции движения

Рис. 161

среды, которая, согласно нашему опыту, на дело влияния не имеет, мы без труда могли изучить и другие случаи. Для равных неупругих масс со скоростями v и 0 или v и v^1 скорость после удара будет $\frac{v}{2}$ или $\frac{v+v^1}{2}$. Само собой разумеется однако, что все эти рассуждения возможны только тогда, когда мы из опыта уже знаем, *отчего* все зависит.

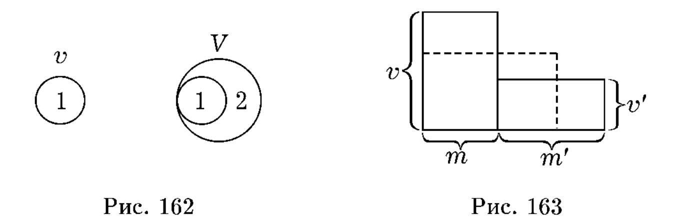


Рис. 162 Рис. 163

Чтобы мы могли перейти к массам неравным, мы должны уже знать из опыта не только *вообще*, что масса имеет здесь влияние, но и *какого* рода это влияние. Если, например, сталкиваются два тела с массами 1 и 3 и скоростями v и V, то возможны здесь следующие рассуждения. Мы выделяем из массы 3 массу 1 и заставляем сначала столкнуться массы 1 и 1; результирующая скорость будет $\frac{v+V}{2}$. Тогда мы имеем еще массу $1+1=2$ и массу 2 со скоростями $\frac{v+V}{2}$ и V, которые, столкнувшись, согласно тому же принципу, дадут скорость

$$\frac{\frac{v+V}{2}+V}{2}=\frac{v+3V}{4}=\frac{v+3V}{1+3}.$$

Рассмотрим еще более общий случай. Возьмем массы m и m', которые на рис. 163 изображены в виде горизонтальных и пропорциональных этим массам линий. Соответствующие им скорости v и v' нанесем, как ординаты, к соответствующим частям массы. Если $m < m'$, то мы вырезаем сначала из m' часть, равную m. Массы m и m дают массу $2m$ со скоростью $\frac{v+v'}{2}$, что и изображено на фигуре пунктирной линией. Подобным же образом мы поступаем с остатком $m'-m$. Мы вырезаем из массы $2m$ часть $m'-m$ и получаем массу $2m-[m-m']$ со ско-

ростью $\frac{v+v'}{2}$ и массу $2(m-m')$ со скоростью $\frac{\frac{v+v'}{2}+v'}{2}$. Подобным же образом мы можем продолжать дальше, пока не получим для всей массы $m+m'$ *одну и ту же* скорость u. Конструктивный метод, изображенный на рисунке, очень ясно показывает, что при этом существует уравнение поверхностей $(m+m')u = mv+m'v'$. Но нетрудно заметить, что все эти рассуждения возможны только в том случае, когда на основании того или другого опыта уже известно, что *решающее значение* имеет здесь сумма $mv+m'v'$, т. е. *форма* влияния массы m и скорости v. Если хотят отказаться от принципов Ньютона, то *нельзя обойтись* без других специальных данных опыта о значении mv, равноценных по своему значению с теми принципами.

7. На основании тех же принципов Ньютона может быть выяснен процесс при ударе *упругих* масс. Стоит только заметить, что *изменение формы* упругих масс вызывает тесно связанные с этим силы, *восстановляющие эту форму.* Далее при прикосновении тел неравной скорости возникают уравнивающие скорость силы, на каковом факте основана, так называемая, непроницаемость тел. Когда сталкиваются две упругие массы M, m со скоростями C, c, то наступает изменение формы, которое заканчивается только тогда, когда скорости стали равными. Так как мы имеем дело с внутренними силами и количество движения поэтому остается тем же, да и движение центра тяжести не изменяется, то в этот момент общая скорость будет

$$u = \frac{MC+mc}{M+m}.$$

Упругие тела восстановляют свою форму, а в случае тел *совершенно упругих* снова действуют те же силы (в те же элементы времени и с теми же элементами пути), но в обратной последовательности. Поэтому масса M (если она ударяется о массу m) снова испытывает потерю скорости $C-u$, а масса m снова выигрывает скорость $u-c$. Вследствие этого мы после удара получаем для скоростей V, v выражения $V = 2u-C$ и $v = 2u-c$ или

$$V = \frac{MC+m(2c-C)}{M+m}, \quad v = \frac{mc+M(2C-c)}{M+m}.$$

Если примем в этих формулах $M = m$, то получим $V = c$ и $v = C$, т. е. при равных массах обмен скоростей. Так как для специального

случая $\frac{M}{m} = -\frac{c}{C}$ или $MC + mc = 0$ и u также $= 0$, то отсюда следует, что $V = 2u - C = -C$ и $v = 2u - c = -c$, т. е. в этом случае массы отскакивают друг от друга с теми же (но только противоположно направленными) скоростями, с которыми они сталкиваются. Приближение двух масс M, m со скоростями C, c, принимаемыми за *положительные*, если они направлены в *одну и ту же* сторону, происходит со скоростью $C - c$, а удаление — со скоростью $V - v$. Таким образом, из $V = 2u - C$, $v = 2u - c$ мы сейчас же получаем $V - v = -[C - c]$, т. е. относительная скорость приближения и удаления их равна. Пользуясь выражениями $V = 2u - C$ и $v = 2u - c$, мы очень легко получаем также следующие два уравнения:

$$MV + mv = MC + mc,$$
$$MV^2 + mv^2 = MC^2 + mc^2.$$

Итак, *количество движения* до и после удара (считая в одном и том же направлении) остается *равным* и сумма *живых* сил до и после удара тоже остается *равной*. Так мы получили все положения Гюйгенса, исходя из точки зрения Ньютона.

8. Если будем рассматривать законы удара тел с точки зрения Гюйгенса, нам придется прежде всего принять в соображение следующее. Высота поднятия центра тяжести какой-нибудь системы масс определяется живой силой $1/2 \sum mv^2$. Всегда, когда *совершается* работа, т. е. когда массы двигаются в направлении действия сил, сумма эта возрастает на величину, равную совершенной работе. Напротив того, когда система масс движется в направлении, обратном направлению действия сил, когда она, выражаясь кратко, *поглощает* работу, то это приводит к уменьшению этой суммы на величину той работы. Таким образом, покуда алгебраическая сумма поглощенной и совершенной работы не изменяется, сумма $1/2 \sum mv^2$ тоже остается без изменения, какие бы другие изменения ни произошли в системе. Принимая, что свойство системы тел, найденное им при *исследовании маятника*, существует и при *ударе*, Гюйгенс должен был сейчас же заметить, что сумма живых сил до и после удара остается *одной и той же*. Ибо при взаимном изменении формы тел система тел *поглощает* ту же работу, которую она *совершает*, когда прежняя форма тел восстанавливается, если только тела развивают силы, совершенно определенные их формой, если они восстанавливают свою форму с теми же силами, которые были потрачены для изменения этой формы. Что происходит последнее, можно

узнать только из *специального опыта.* Существует этот закон также только для, так называемых, *совершенно* упругих тел.

Из этой точки зрения сейчас же вытекает большая часть законов удара тел Гюйгенса. Равные массы, сталкивающиеся с равными и противоположными скоростями, отскакивают друг от друга с теми же скоростями. Скорости тогда только однозначно определены, когда они *равны,* и они соответствуют правилу живых сил только тогда, когда они до и после удара остаются *одними и теми же.* Далее ясно, что если одна из двух неравных масс при ударе изменяет только свой знак, но не скорость, то то же самое происходит и с другой массой. Но тогда относительная скорость удаления тел друг от друга после удара равна скорости приближения их друг к другу до удара. Каждый произвольный случай может быть сведен к этому. Пусть c и c^1 суть произвольные по величине и знаку скорости массы m до и после удара. Мы принимаем, что *вся* система получает скорость u такой величины, что $u+c=-(u+c^1)$ или $u=\frac{c-c^1}{2}$. Таким образом, всегда можно найти такую скорость перемещения системы, при которой скорость *одной* массы меняет *только* свой знак, и, таким образом, правило относительно скоростей приближения и удаления тел имеет общее значение.

Своеобразный ход идей Гюйгенса не представляет вполне законченного замкнутого целого, и поэтому он вынужден там, где *условия* скорости ударяющихся масс неизвестны заранее, заимствовать некоторые воззрения из хода идей Галилея–Ньютона, на что мы указывали уже выше. Такое заимствование понятий массы и количества движений заключается уже, хотя и не открыто высказанное, в правиле, по которому скорость всякой ударяющейся массы меняет только свой знак, если до удара $\frac{M}{m}=-\frac{c}{C}$. Если бы он захотел ограничиться только своей своеобразной точкой зрения, Гюйгенс вряд ли *нашел бы* это простое правило, хотя он и сумел найденное уже правило *вывести* по-своему. В этом случае скорость u, вследствие равных и противоположных количеств движения, после изменения формы равна нулю. Когда форма тел снова восстановляется и совершается та же работа, которую система раньше поглотила, то *восстановляются те же* скорости, но с *обратными* знаками.

Этот же *специальный* случай представляет также и случай *общий,* если представить себе всю систему обладающей еще и скоростью *перемещения.* Пусть ударяющиеся массы изображены на рис. 164. Пусть

масса $M = BC$ и масса $m = AC$, пусть соответствующие скорости будут $C = AD$ и $c = BE$. Мы опускаем перпендикуляр CF на линию AB, и проводим через точку F линию IK, параллельную к AB. Тогда $ID = \frac{m(C-c)}{M+m}$, $KE = \frac{m(C-c)}{M+m}$. Если массы M и m сталкиваются со скоростями ID и KE и всей системе вместе с тем сообщают скорость $u = AI = KB = C - \frac{m(C-c)}{M+m} = c + \frac{M(C-c)}{M+m} = \frac{MC+mc}{M+m}$, то наблюдатель, *двигающийся* со скоростью u, видит *специальный случай*, а наблюдатель, *остающийся в покое*, видит *общий* случай с произвольными скоростями. Выведенные выше общие формулы удара тел получаются сейчас же из этого воззрения. Мы находим

$$V = AG = C - 2\frac{m(C-c)}{M+m} = \frac{MC + m(2c-C)}{M+m}$$

$$v = BH = c + 2\frac{M(C-c)}{M+m} = \frac{mc + M(2C-c)}{M+m}.$$

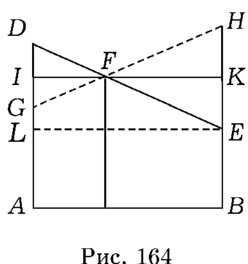


Рис. 164

В основе плодотворного метода мнимых движений Гюйгенса лежит та простая мысль, что тела без *разности* скоростей не могут действовать друг на друга через удар. Все силы удара обусловлены разностями скоростей (как все действия теплоты обусловлены разностями температур). Так как все силы в свою очередь определяют не скорости, а только изменения и, следовательно, опять-таки только разности скоростей, то ясно, что в явлении удара все сводится только к *разностям* скоростей. По отношению к каким телам скорости оцениваются безразлично. В действительности многие случаи удара, которые нам вследствие недостатка в упражнении кажутся случаями различными, при более тщательном исследовании представляются, как *один* случай.

Не имеет никакого смысла в отношении *одного только* тела и способность действия движущегося тела, безразлично, измеряют ли эту последнюю при помощи количества движения (сообразуясь с временем действия) или при помощи живой силы (сообразуясь с путем действия). Она получает смысл только тогда, когда сюда присоединяется еще второе тело и тогда в первом случае имеет решающее значение

разность скоростей, а во втором — квадрат этой разности. *Скорость* представляет некоторый физический *уровень*, подобно температуре, потенциальной функции и т. д.

Нельзя не заметить, что тот же опыт, к которому привели Гюйгенса его исследования над маятником, он мог получить сначала и из наблюдений процессов удара тел. Все дело сводится к тому, чтобы *во всех фактах познать одни и те же элементы*, или, если угодно, в данном факте снова находить элементы факта другого, уже известного. Но из каких фактов исходят, зависит от исторических случайностей.

9. Закончим эту главу еще некоторыми, более общими замечаниями. Сумма *количеств* движения сохраняется при ударе, и притом, как при ударе неупругих, так и при ударе упругих тел. Но это сохранение не происходит *вполне в смысле Декарта*, количество движения одного тела не уменьшается настолько, насколько возрастает количество движения другого тела, как это впервые заметил Гюйгенс. Если, например, две равные неупругие массы сталкиваются с равными и противоположными скоростями, то они обе теряют все свое количество движения в смысле Декарта. Напротив того, сумма количеств движения сохраняется, если считают все скорости *в одном направлении* положительными, а в противоположном направлении — отрицательными. В этом смысле понятое, количество движения сохраняется во всех случаях.

Сумма *живых сил* изменяется при ударе неупругих масс, но остается без изменения при ударе абсолютно упругих масс. Уменьшение живых сил, наступающее при ударе неупругих масс или вообще когда столкнувшиеся тела после удара двигаются с общей скоростью, определить не трудно. Если M, m означают массы, C, c — соответствующие скорости до удара, u — общая скорость после удара, то потеря живой силы будет

$$\frac{1}{2}MC^2 + \frac{1}{2}mc^2 - \frac{1}{2}(M+m)u^2. \tag{1}$$

Так как $u = \dfrac{MC+mc}{M+m}$, то эта потеря может быть выражена в следующей форме: $\dfrac{Mm}{M+m} \cdot (C-c)^2$. Карно выразил эту потерю в следующей форме:

$$\frac{1}{2}M(C-u)^2 + \frac{1}{2}m(u-c)^2. \tag{2}$$

Если выбрать эту последнюю форму, то в $\frac{1}{2}M(C-u)^2$ и в $\frac{1}{2}m(u-c)^2$ нетрудно узнать живые силы, созданные *работой внутренних* сил. Таким образом, потеря в живой силе при ударе соответствует работе внутренних (так называемых, молекулярных) сил. Если соединить знаком равенства оба выражения 1 и 2 и принять в соображение, что $(M+m)u = MC + mc$, то получается тождество. Выражение Карно важно для оценки потерь при ударе частей машин.

Во всех наших рассуждениях мы рассматривали ударяющиеся массы, как точки, которые двигаются только в направлении соединяющей их линии. Это упрощение допустимо, когда центры тяжести и точка соприкосновения ударяющихся масс лежат на одной прямой линии, т. е. при, так называемом, центральном ударе. Исследование, так называемого, *эксцентрического* удара несколько сложнее, но не представляет особого принципиального интереса. Интересен здесь еще вопрос другого рода, который занимал уже Wallis'а. Когда какое-нибудь тело вращается около оси и движение его вдруг тормозится задержкой какой-нибудь точки, то сила удара в зависимости от положения (расстояния от оси) этой точки различна. Точку, в которой сила удара наибольшая, Wallis называет *центром удара*. Если задержать именно эту точку, то ось не испытывает никакого давление. Современники и последующие ученые развили эти исследования далее, но останавливаться на них подробнее в настоящей книге у нас нет никакого повода.

10. Рассмотрим еще в кратких чертах одно интересное применение законов удара тел, а именно, определение скоростей брошенных тел при помощи баллистического маятника. Пусть масса M подвешена в качестве маятника на лишенной веса и массы нити. Пусть она в положении равновесия вдруг получает горизонтальную скорость V. Она поднимается с этой скоростью на высоту $h = l[1 - \cos\alpha] = \frac{V^2}{2g}$, где l есть длина маятника, α — угол отклонения и g — ускорение тяжести. Так как между продолжительностью колебания T и величинами l и g существует отношение $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то мы легко находим, что $V = \frac{gT}{\pi}\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$ и, пользуясь известной геометрической формулой, получаем

$$V = \frac{2}{\pi}gT\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Если скорость V получается от брошенного тела с массой m, прилетающего со скоростью v и ударяющегося о тело с массой M так, что

после удара скорость во всяком случае, будь то упругий или неупругий удар, становится *общей* V, то тогда $mv = (M + m)v$, или (если m достаточно мало в сравнении с M) $v = \frac{M}{m}V$, и следовательно,

$$v = \frac{2}{\pi}\frac{M}{m}gT\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Если мы не можем рассматривать баллистический маятник, как маятник простой, то рассуждения наши, согласно неоднократно примененным уже принципам, таковы. Брошенное тело m со скоростью v имеет величину движения mv, которая давлением p при ударе в течение очень короткого времени τ уменьшается до mV. При этом $m(v - V) = p\tau$ или, если V очень мало сравнительно с v, $mv = p\tau$. От допущения особых *мгновенных сил*, которые вдруг вызывают известные скорости, мы вместе с Понселе отказываемся. Нет мгновенных сил. Были названы таковыми очень большие силы, которые в очень короткое время вызывают заметные скорости, но во всем остальном ничем не отличаются от сил, действующих постоянно. Если силу, действующую при ударе, невозможно рассматривать, как постоянную во все время ее действия, то выражение $p\tau$ остается только заменить выражением $\int p\,dt$, а во всем остальном рассуждения остаются те же.

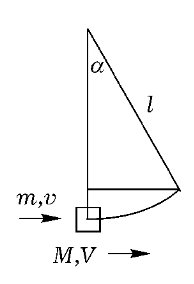


Рис. 165

Равная сила, уничтожающая величину движения брошенного тела, действует на маятник, как сила противодействия. Если путь движения брошенного тела (и, следовательно, также направление действия силы) перпендикулярен к оси маятника и находится на расстоянии от него, равном b, то момент этой силы есть bp, вызванное угловое ускорение $= \frac{bp}{\sum mr^2}$ и вызванная в течение времени τ угловая скорость

$$\varphi = \frac{bp\tau}{\sum mr^2} = \frac{bmv}{\sum mr^2}.$$

Следовательно, живая сила, которой достигает маятник по истечении времени τ, есть

$$\frac{1}{2}\varphi^2\sum mr^2 = \frac{1}{2}\frac{b^2m^2v^2}{\sum mr^2}.$$

Благодаря этой живой силе маятник делает отклонение α; так как центр тяжести его находится на расстоянии a от оси, вес его Mg поднимается на $a(1-\cos\alpha)$, совершенная работа $= Mga(1-\cos\alpha)$, каковая работа равна упомянутой живой силе. Соединив знаком равенства оба выражения, мы без труда получаем

$$v = \frac{\sqrt{2Mga\sum mr^2(1-\cos\alpha)}}{mb}.$$

Продолжительность колебания будет

$$T = \pi\sqrt{\frac{\sum mr^2}{Mga}}.$$

Применив известную геометрическую формулу, получаем

$$v = \frac{2}{\pi}\frac{M}{m}\frac{a}{b}gT\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Формула вполне аналогична формуле для более простого случая. Наблюдения, которые приходится делать для определения v, касаются массы маятника и брошенного тела, расстояний центра тяжести и точки столкновения обеих масс от оси, продолжительности колебания и амплитуды маятника. В формуле сейчас же можно заметить измерения скорости. Выражения $\frac{2}{\pi}$ и $\sin\frac{\alpha}{2}$ суть простые числа; таковы же выражения $\frac{M}{m}$ и $\frac{a}{b}$, в которых числитель и знаменатель выражены в единицах одного и того же рода. Множитель же gT имеет измерение lt^{-1} и есть, следовательно, скорость. Баллистический маятник изобретен Robins'ом и описан в его сочинении «New Principles of Gunneri» (1742).

5. Принцип д'Аламбера

1. Одним из важнейших принципов, служащих для быстрого и удобного решения чаще встречающихся задач механики, является принцип д'Аламбера. Исследования относительно центра колебаний, которыми занимались почти все выдающиеся современники Гюйгенса и последовавшие за ним ученые, привели к простым замечаниям, которые в конце концов д'Аламбер и обобщил в своем принципе. Бросим сначала

взгляд на эти предварительные работы. Почти все они имели в своей основе желание заменить вывод Гюйгенса, который казался недостаточно *очевидным*, другим выводом, *более убедительным.* Хотя это желание и основано было, как мы уже видели, на *недоразумении*, обусловленном историческими причинами, нам тем не менее не приходится, конечно, сожалеть о его результате, о *новых*, достигнутых благодаря ему точках зрения.

2. Самым выдающимся после Гюйгенса основателем теории центра колебаний был Якоб Бернулли. Еще в 1686 году он пытался объяснить сложный маятник при помощи рычага. У него были однако неясности и противоречия с воззрениями Гюйгенса, на которые (в «Journal de Rotterdam», 1690) обратил внимание L'Hospital. Затруднения исчезли, когда стали рассматривать скорости, достигнутые не в *конечные* времена, а в *бесконечномалые* части времени. В 1691 году в «Acta eruditorum» и в 1703 году в работах Парижской Академии Якоб Бернулли исправил свою ошибку. Изложим здесь в существенных чертах позднейший его вывод.

Рассмотрим вместе с Бернулли горизонтальный, вращаемый около точки A, лишенный массы стержень AB, связанный с массами m, m' на расстояниях r, r' от точки A. В своей *связи* массы двигаются с *другими* ускорениями, чем ускорение свободно падающего тела, каковое ускорение сейчас же наступает, как только связь *разрушена.* Только та точка на неизвестном еще нам расстоянии x от A, которую мы называем центром колебаний, движется в связи с другими с тем же ускорением, которое она имела бы одна, т. е. с ускорением g.

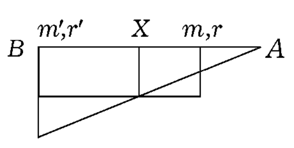


Рис. 166

Если бы масса m двигалась с ускорением $\varphi = \frac{gr}{x}$ и масса m' с ускорением $\varphi' = \frac{gr'}{x}$, т. е. если бы естественные ускорения были пропорциональны расстояниям их от точки A, то массы, будучи связаны, друг другу *не препятствовали бы.* В действительности же в случае связи

масса	m	испытывает	ущерб	ускорения	$g - \varphi$
<<	m'	<<	приращение	<<	$\varphi' - g$ и, следовательно,
первая		<<	ущерб	силы	$m(g - \varphi) = g\frac{(x - r)}{x}m$
и вторая		<<	приращение	<<	$m(\varphi' - g) = g\frac{(r' - x)}{x}m'$.

Так как *взаимодействие* масс происходит только через посредство связи рычага, то и тот ущерб в силе, и это приращение силы должны быть подчинены закону рычага. Если масса m связью через рычаг с силой f удерживается от движения, которое она совершала бы при полной свободе, то она производит то же натяжение f на плечо рычага r в виде противодействия. Вот одно это противодействие может быть передано на массу m', может быть удержано здесь в равновесии давлением $f' = \frac{r}{r'}f$, и, следовательно, ему равнозначно. Таким образом, согласно вышеприведенному, здесь существует отношение: $g\frac{r'-x}{x}m' = \frac{r}{r'}g\frac{x-r}{x}m$ или $(x-r)mr = (r'-x)m'r'$. Отсюда мы получаем $x = \frac{mr^2 + m'r'^2}{mr + m'r'}$, как раз так, как нашел Гюйгенс. Обобщение данного исследования для произвольного числа масс и не лежащих на одной прямой очевидно само собой.

3. Иоганн Бернулли занимался проблемой центра колебания в 1712 г. Подошел он к этому вопросу иным путем. С работами его всего удобнее познакомиться по собранию его сочинений (Opera, Lausannae et Genevae, 1762, T. 2 и 4). Рассмотрим здесь наиболее своеобразные идеи названного физика. Он приходит к своей цели, мысленно разделяя *массы* и *силы*.

Рассмотрим, *во-первых*, два простых маятника различной длины l, l', тела которых испытывают ускорения тяжести, пропорциональные этим длинам, g, g', т. е. примем $\frac{l}{l'} = \frac{g}{g'}$. Так как продолжительность колебания $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, то оба маятника имеют одну и ту же продолжительность колебания. Таким образом, удвоение длины маятника вместе с одновременным удвоением ускорения тяжести не изменяет продолжительности колебания.

В одном и том же месте земного шара непосредственно изменять ускорение тяжести невозможно. Но можно придумать такие приемы, которые соответствовали бы изменению ускорения тяжести. Представим себе поэтому, *во-вторых*, прямой лишенный массы стержень длиной в $2a$, вращающийся около точки в своей середине. Поместим на одном конце его массу m и на другом массу m'. Вся масса этого маятника тогда будет $m + m'$ на расстоянии a от точки вращения, сила же будет

$(m - m')g$ и, следовательно, ускорение будет $\frac{m-m'}{m+m'}g$. Чтобы получить длину маятника (с обыкновенным ускорением тяжести g), изохронного с нашим маятником длиной в a, мы, пользуясь предыдущим правилом, пишем $\frac{l}{a} = \frac{g}{\frac{m-m'}{m+m'}g}$, или $l = a\frac{m+m'}{m-m'}$.

Рис. 167

Представим себе теперь, *в-третьих*, простой маятник длины l с массой m в конце. Вес этой массы соответствует на маятнике двойной длины половине силы. Половина массы m, будучи удалена на расстояние 2, испытывала бы, следовательно, от силы, действующей в 1, то самое ускорение, а четвертая часть массы испытывала бы двойное ускорение. Таким образом, простой маятник длины 2 с первоначальной силой в 1 и $\frac{m}{4}$ на конце был бы изохронен с первоначальным маятником. Обобщив сказанное, нетрудно заметить, что можно любую силу f, действующую на сложный маятник на произвольном расстоянии r, переместить на расстояние 1 с величиной rf и любую массу m, находящуюся на расстоянии r, переместить на расстояние 1 с величиной r^2m, не изменяя при этом нимало продолжительности колебания маятника. Если сила f действует на плечо рычага a, между тем как масса m находится на расстоянии r от точки вращения, то сила f эквивалентна действующей на m силе $\frac{af}{r}$, которая сообщает, следовательно, массе m ускорение $\frac{af}{mr}$ и угловое ускорение $\frac{af}{mr^2}$.

Поэтому, чтобы получить угловое ускорение сложного маятника, нужно сумму *статических моментов* разделить на сумму *моментов инерции*. К той же мысли пришел своим путем и несомненно независимо от Иоганна Бернулли Brook Taylor, но высказал ее несколько позже, а именно в 1714 году, в своем сочинении «Methodus incrementorum». Этим исчерпываются все наиболее выдающиеся попытки дать ответ на вопрос о центре колебания, и мы сейчас же увидим, что они все содержат уже *ту же самую мысль*, которую д'Аламбер впоследствии выразил в *более общей форме.*

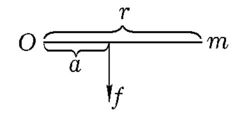


Рис. 168

4. Пусть на систему каким-либо образом связанных между собой точек M, M', M'' ... действуют силы P, P', P'' ..., которые *свободным* точкам сообщили бы известные движения. В точках *связанных* появляются движения в общем *другие.* Эти движения могли бы быть

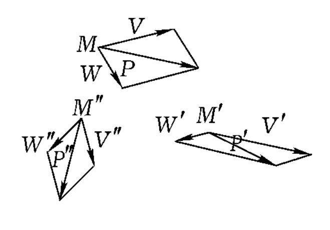


Рис. 169

вызваны силами W, W', W'' ... Рассмотрим эти движения поближе. Для этой цели мы разложим мысленно силу P на силы W и V, силу P' на W' и V', силу P'' на W'' и V'' и т. д. Так как, благодаря связям, *фактически* будут действовать только составляющие силы W, W', W'' ..., то другие составляющие силы V, V', V'' ... именно благодаря связям будут друг друга *уравновешивать*. Силы P, P', P'' ... мы назовем системой *приложенных* сил, силы W, W', W'' ... системой сил, вызывающих действительные движения, или короче, системой *действительных* сил, а силы V, V', V'' ... системой приобретенных и потерянных сил или системой *связанных* сил. Таким образом, мы видим, что если разлагают приложенные силы на действительные и связанные силы, то последние, именно благодаря этим связям, уравновешивают друг друга. Именно в этом состоит принцип д'Аламбера, и мы позволили себе только то несущественное изменение, что вместо того, чтобы говорить о вызванных силами величинах движения, как это сделал д'Аламбер (в своем сочинении «Traité de dynamique», 1743), мы говорим о самих силах.

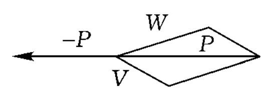


Рис. 170

Так как система сил V, V', V'', ... находится *в равновесии*, то к ней может быть применен принцип *возможных перемещений*. Это тоже дает одну форму принципа д'Аламбера. Другую его форму мы получаем следующим образом. Силы P, P' ... суть равнодействующие сил составляющих W, W' ... и V, V' ... Поэтому, если мы возьмем силы $-P$, $-P'$ ... с силами W, W' ... и V, V' ..., мы получим равновесие. Система сил $-P$, W, V находится в состоянии равновесия. Но сама система сил V тоже находится в равновесии. Вследствие этого находится в равновесии и система $-P$, W, или также система P, $-W$. Таким образом, если к приложенным силам прибавлять действительные силы с обратными знаками, то, благодаря связям, системы находятся в равновесии. И к системе P, $-W$ может быть применен принцип возможных перемещений, как это сделал Лагранж в своей аналитической механике.

То, что между системой P и системой $-W$ существует равновесие, может быть выражено еще и в другой форме. Можно сказать, что система W *эквивалентна* системе P. В этой форме применили

этот принцип с несущественным отличием от принципа д'Аламбера Hermann («Phoronomia», 1716) и Эйлер («Commentarien der Petersburger Akademie, ältere Reihe», Bd. 7, 1740).

5. Иллюстрируем принцип д'Аламбера примерами. На лишенном массы вороте с радиусами R, r подвешены грузы P и Q, не находящиеся в равновесии. Мы разлагаем силу P на силу W, которая могла бы вызвать действительное движение в случае массы свободной, и силу V, т.е. принимаем $P = W + V$; точно так же мы принимаем $Q = W' + V'$, так как мы здесь можем пренебречь всяким другим движением, кроме движения по вертикали. Поэтому $V = P - W$ и $V' = Q - W'$ и — так как силы связанные V, V' находятся между собой в равновесии — $VR = V'r$. Вставив вместо V, V' их значения, мы получаем уравнение

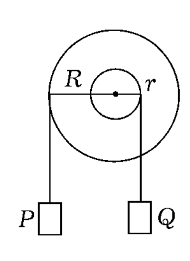


Рис. 171

$$(P - W)R = (Q - W')r, \tag{1}$$

которое можно получить и прямо, если применить *вторую* форму принципа д'Аламбера. Из условий задачи нам не трудно заметить, что дело идет о равномерно ускоренном движении и что нам остается получить только ускорение. Сохраняя земную систему мер, мы имеем силы W и W', которые вызывают в массах $\frac{P}{g}$ и $\frac{Q}{g}$ ускорения γ и γ', вследствие чего $W = \frac{P}{g}\gamma$, $W' = \frac{Q}{g}\gamma'$. Кроме того, мы знаем, что $\gamma' = -\gamma\frac{r}{R}$. Уравнение (1) переходит поэтому в следующее уравнение

$$\left(P - \frac{P}{g}\gamma\right) R = \left(Q + \frac{Q}{g}\frac{r}{R}\gamma\right) r. \tag{2}$$

Отсюда получаем

$$\gamma = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2} Rg$$

и

$$\gamma' = -\frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2} rg.$$

Таким образом, наше движение определено.

Можно сейчас же заметить, что приходят к тому же результату, если применить понятия статического момента и момента инерции. Мы получаем тогда угловое ускорение

$$\varphi = \frac{PR - Qr}{\frac{P}{g}R^2 + \frac{Q}{g}r^2} = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2}g$$

и, так как $\gamma = R\varphi$, $\gamma' = -r\varphi$, то мы опять получаем прежние выражения.

Когда даны и массы и силы, то задача найти движение есть задача *определенная.* Примем же, что дано ускорение γ, с которым движется P, и нужно найти те грузы P и Q, которыми это ускорение обусловлено. Мы тогда из уравнения (2) легко получаем $P = \dfrac{Q(Rg + r\gamma)r}{(g-\gamma)R^2}$, т. е. отношение между P и Q. Один из этих двух грузов остается тогда произвольным, и задача в этой форме есть задача *неопределенная* и она может быть разрешена бесконечно многими различными способами.

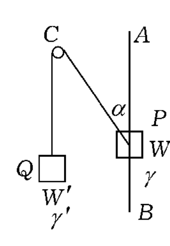


Рис. 172

Возьмем в качестве второго примера другой случай. Груз P может двигаться по вертикальной прямой AB и посредством нити, переброшенной через блок C, связан с грузом Q. Нить образует с линией AB переменный угол α. Движение не может быть здесь равномерно ускоренным. Но когда мы рассматриваем только движения вертикальные, то для каждой величины α мы очень легко можем найти мгновенные ускорения γ и γ' сил P и Q. Поступая вполне, как в предыдущем случае, мы находим

$$P = W + V$$

$$Q = W' + V'$$

$$V' \cos\alpha = V \quad \text{или, так как} \quad \gamma' = -\gamma\cos\alpha,$$

$$\left(Q + \frac{Q}{g}\cos\alpha\,\gamma\right)\cos\alpha = P - \frac{P}{g}\gamma, \quad \text{откуда}$$

$$\gamma = \frac{P - Q\cos\alpha}{Q\cos\alpha^2 + P}g$$

$$\gamma' = -\frac{P - Q\cos\alpha}{Q\cos\alpha^2 + P}\cos\alpha\, g.$$

Тот же результат очень легко получить, если применить в несколько обобщенной форме понятия статического момента и момента инерции. Объясним это на следующем примере. Сила или статический момент, который действует на P, есть $P - Q\cos\alpha$. Но груз Q движется в $\cos\alpha$ раз быстрее, чем P, вследствие чего его массу следует считать в $\cos\alpha^2$ раза больше. Отсюда следует, что ускорение, которое получает P, есть

$$\gamma = \frac{P - Q\cos\alpha}{\frac{Q}{g}\cos\alpha^2 + \frac{P}{g}} = \frac{P - Q\cos\alpha}{Q\cos\alpha^2 + P}g.$$

Таким же образом получается соответственное выражение для γ'. В основе этого способа лежит то простое наблюдение, что при движении масс путь движения *не имеет существенного значения*, а существенно *отношение* скоростей или перемещений масс. Применение понятия момента инерции в намеченном здесь более широком значении может часто оказаться полезным.

6. Изобразив достаточно наглядно применение принципа д'Аламбера, нам будет теперь нетрудно вполне уяснить себе его значение. Вопросы *движения* связанных точек легко решаются на основе данных опыта о взаимодействии связанных тел — данных, полученных при исследованиях условий *равновесия*. Там, где этих данных опыта оказалось бы недостаточно, не мог бы помочь и принцип д'Аламбера, что достаточно ясно вытекает и из приведенных примеров. Не следует поэтому думать, что принцип д'Аламбера есть принцип *общий*, при котором специальный опыт — дело *излишнее*. Если он краток и как будто прост, то причиной этому является только именно эта ссылка на *существующие уже* данные опыта. Без самого точного знания дела, основанного на самом подробном опытном изучении, мы никак *обойтись* не можем. Мы должны получить эти данные опыта или из самого нашего случая, непосредственным его исследованием, или внести в этот случай данные, приобретенные нами уже раньше из наблюдений другого случая. В действительности мы с помощью принципа д'Аламбера, как показали наши примеры, не учимся ничему такому, чему мы не могли бы научиться и другим путем. Принцип этот имеет значение шаблона для решения задач — шаблона, до известной степени освобождающего нас от труда размышления над каждым новым случаем, так как он содержит указание на применение данных опыта общеизвестных и привычных. Принцип этот содействует не столько *уразумению* процессов,

сколько *практическому осилению* их. Значение нашего принципа *экономическое.*

Раз мы решили задачу согласно принципу д'Аламбера, то мы можем успокоиться на опыте случаев равновесия, применение которого включает этот принцип. Но если мы хотим вполне ясно уразуметь процесс, т. е. рассмотреть в нем простейшие, известные механические элементы, то мы должны проникнуть глубже и этот опыт случаев равновесия заменить опытом Ньютона (как это сделано на стр. 214) или опытом Гюйгенса. В первом случае мы думаем об *ускоренных* движениях, обусловленных взаимодействием тел. Во втором случае мы непосредственно рассматриваем *работы*, от которых, согласно точке зрения Гюйгенса, зависят живые силы. Эта точка зрения особенно удобна там, где применяют принцип возможных перемещений, чтобы выразить условие равновесия системы V или $P - W$. Принцип д'Аламбера тогда выражает то, что сумма возможных моментов системы V или системы $P - W$ равна нулю. Элементарная работа связанных сил, если *отвлекаются* от растяжения связей, равна нулю. Все работы совершаются тогда *только* системой P и работы, совершенные системой W, должны быть тогда равны работам системы P. Все *возможные* работы, если отвлечься от растяжения связей, исходят из сил *приложенных.* Таким образом, в этой форме принцип д'Аламбера ничем существенным не отличается от принципа живых сил.

7. Для применения принципа д'Аламбера удобно каждую силу P, приложенную к массе m, разложить на три перпендикулярные друг к другу составляющие X, Y, Z параллельно осям прямоугольной системы координат, каждую действительную силу W разложить на соответствующие составляющие $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, где ξ, η, ζ означают ускорения в направлениях координат, и, наконец, каждое перемещение разложить на три перемещения δx, δy, δz. Так как работа каждой составляющей силы проявляется только при параллельном перемещении, то равновесие системы $(P, -W)$ дано в следующем уравнении

$$\sum[(X - m\xi)\delta x + (Y - m\eta)\delta y + (Z - m\zeta)\delta z] = 0 \qquad (3)$$

или

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \sum(\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z). \qquad (4)$$

Оба уравнения представляют собой непосредственное выражение упомянутого здесь правила *о возможной* работе приложенных сил. Если

эта работа равна нулю, то мы имеем специальный случай равновесия. Принцип возможных перемещений вытекает, как *специальный* случай, из данного выражения принципа д'Аламбера, что вполне естественно, так как и в общем, и в частном случае самым существенным является опытное познание *значения работы.*

Уравнение (3) дает необходимые уравнения движения, для чего возможно больше перемещений δx, δy, δz выражаются благодаря их отношениям к остальным перемещениям через эти остальные перемещения, а коэффициенты остальных произвольных перемещений принимаются равными нулю, как это было показано при применении принципа возможных перемещений.

Стоит решить несколько задач, согласно принципу д'Аламбера, чтобы, с одной стороны, научиться ценить удобства его, а с другой стороны, прийти к убеждению, что, во всяком случае, можно, как только появится в этом потребность, исследованием элементарных механических процессов решить ту же задачу с полной ясностью и непосредственно прийти к тем же результатам. Убеждение в *осуществимости* этого метода делает *выполнение* его в каждом данном случае там, где дело идет скорее о целях практических, ненужным.

6. Принцип живых сил

1. Впервые, как известно, стал пользоваться принципом живых сил Гюйгенс. Иоганну и Даниелю Бернулли осталось только позаботиться о большей общности выражения его и для этого им осталось лишь мало прибавить. Если p, p', p'', $\ldots$ суть грузы, m, m', m'', $\ldots$ — соответствующие массы, h, h', h'', $\ldots$ — высоты падения свободных или связанных масс, v, v', v'', $\ldots$ — достигнутые скорости, то мы имеем соотношение $\sum ph = {}^1\!/_2 \sum mv^2$. Если бы начальные скорости не были равны нулю, а были бы v_0, v_0', v_0'', $\ldots$, то наш принцип выражал бы приращение живых сил, благодаря совершенной работе, и тогда гласил бы

$$\sum ph = \frac{1}{2} \sum m(v^2 - v_0^2).$$

Принцип остается еще применимым и тогда, когда p означают не грузы, а какие угодно постоянные силы, и h не вертикальные высоты падения, а какие бы то ни было пути, описанные в направлении действия сил. В случае сил переменных выражения ph, $p'h'$, $\ldots$ должны

быть заменены выражениями $\int p\,ds$, $\int p'\,ds'$, ... , в которых p означают переменные силы, а ds — описанные в направлении действия этих сил элементы пути. Мы тогда имеем

$$\int p\,ds + \int p'\,ds' + \ldots = \frac{1}{2}\sum m(v^2 - v_0^2) \quad \text{или}$$

$$\sum \int p\,ds = \frac{1}{2}\sum m(v^2 - v_0^2). \tag{1}$$

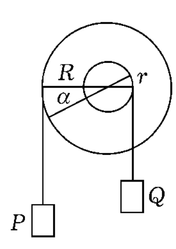


Рис. 173

2. Для иллюстрации принципа живых сил рассмотрим сначала ту же простую задачу, которую мы решали выше, руководствуясь принципом д'Аламбера. На вороте с радиусами R, r подвешены грузы P, Q. Как только наступает движение, совершается работа, которой и определяется достигнутая живая сила. Если наш аппарат поворачивается на угол α, то совершенная *работа* равна

$$PR\alpha - Qr\alpha = \alpha(PR - Qr).$$

Когда угол вращения α соответствует достигнутой угловой скорости φ, то созданная *живая* сила есть

$$\frac{P}{g}\frac{(R\varphi)^2}{2} + \frac{Q}{g}\frac{(r\varphi)^2}{2} = \frac{\varphi^2}{2g}(pR^2 + Qr^2).$$

Мы имеем, следовательно, следующее уравнение

$$\alpha(PR - Qr) = \frac{\varphi^2}{2g}(PR^2 + Qr^2). \tag{2}$$

Мы имеем здесь дело с равномерно ускоренным движением, и поэтому между углом α, достигнутой угловой скоростью φ и угловым ускорением ψ здесь существует *то же самое* отношение, какое существует между s, v, g в случае свободного падения тела. Если в этом последнем случае мы имеем $s = \frac{v^2}{2g}$, то здесь мы имеем $\alpha = \frac{\varphi^2}{2\psi}$. Введем эту величину угла α в уравнение (1) и мы найдем угловое ускорение $\psi = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2}g$. Абсолютное ускорение груза P есть тогда $\gamma = \frac{PR - Qr}{Pr^2 + Qr^2}Rg$, как мы это нашли уже раньше.

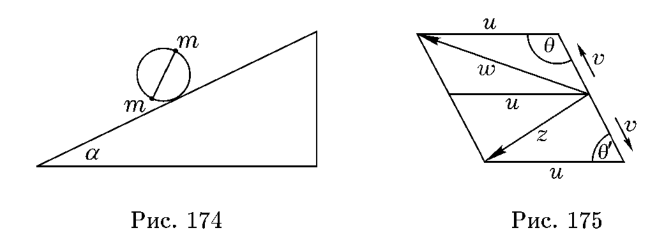


Рис. 174 Рис. 175

Возьмем второй пример. Рассмотрим лишенный массы цилиндр радиуса r. Пусть на его поверхности находятся друг против друга две равные массы m и пусть цилиндр под действием тяжести масс скатывается без скольжения вдоль наклонной плоскости с углом наклона α. Сначала мы убеждаемся в том, что для того, чтобы получить всю живую силу, мы просто можем сложить живую силу вращения с живой силой поступательного движения. Пусть ось цилиндра достигла вдоль длины плоскости скорости движения u и пусть v есть абсолютная скорость вращения поверхности цилиндра. Скорости вращения v обеих масс m образуют со скоростью поступательного движения u углы ϑ и ϑ' (рис. 175), причем $\vartheta + \vartheta' = 180°$. Общие скорости w и z удовлетворяют, следовательно, уравнениям

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\vartheta$$
$$z^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\vartheta'.$$

Так как $\cos\vartheta = -\cos\vartheta'$, то мы имеем

$$w^2 + z^2 = 2u^2 + 2v^2 \quad \text{или}$$
$$\frac{1}{2}mw^2 + \frac{1}{2}mz^2 = \frac{1}{2}m\cdot 2u^2 + \frac{1}{2}m\cdot 2v^2 = mu^2 + mv^2.$$

Если цилиндр поворачивается на уголь φ, то масса m делает в своем вращении путь $r\varphi$ и ось цилиндра тоже перемещается на $r\varphi$. Каково отношение между этими путями, таково и отношение скоростей v и u; эти скорости, следовательно, равны между собой. Таким образом, вся живая сила может быть выражена через $2mu^2$. Если цилиндр проходит вдоль длины наклонной плоскости путь l, то совершенная работа есть $2mgl\sin\alpha = 2mu^2$ и, следовательно, $u = \sqrt{gl\sin\alpha}$. Если мы сравним с этим выражением скорость, достигнутую при скольжении по наклонной плоскости $\sqrt{2gl\sin\alpha}$, то нетрудно видеть, что рассматриваемый нами аппарат движется только с половинным ускорением падения, которое получает скользящее тело при тех же условиях (если не

принять во внимание трения). Если масса равномерно распределена по поверхности цилиндра, то все наше рассуждение не изменяется. Подобное же исследование можно сделать для шара, скатывающегося вдоль наклонной плоскости, откуда видно, что опыт с падением тел Галилея нуждается в количественном отношении в некоторой поправке.

Пусть масса m равномерно распределена по поверхности цилиндра радиуса R. Пусть этот цилиндр имеет одну общую ось и неподвижно связан с лишенным массы цилиндром радиуса r, скатывающимся вдоль наклонной плоскости. Так как в этом случае $\frac{v}{u} = \frac{R}{r}$, то принцип живых сил дает $mgl \sin\alpha = {}^1\!/_2 mu^2(1 + \frac{R^2}{r^2})$ и

$$u = \sqrt{\frac{2gl \sin\alpha}{1 + \frac{R^2}{r^2}}}.$$

При $\frac{R}{r} = 1$ ускорение падения получает прежнюю величину $\frac{g}{2}$. При очень больших величинах $\frac{R}{r}$ ускорение падения становится очень малым. При $\frac{R}{r} = \infty$ *скатывание*, следовательно, совершенно невозможно.

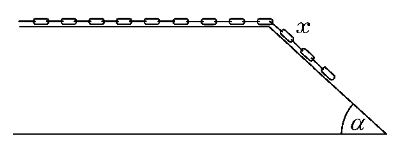


Рис. 176

Возьмем третий пример. Рассмотрим цепь, вся длина которой равна l и часть которой лежит на горизонтальной плоскости, а другая часть — на наклонной плоскости с углом наклона α. Если мы представим себе подставку очень гладкой, то достаточно небольшой свешивающейся вдоль наклонной плоскости части цепи, чтобы она потянула за собою всю остальную часть. Если μ есть масса на единицу длины и если свешивается вдоль наклонной плоскости часть x, то принцип живых сил дает для полученной скорости v уравнение

$$\frac{\mu l v^2}{2} = \mu x g \frac{x}{2} \sin\alpha = \mu g \frac{x^2}{2} \sin\alpha$$

или $v = x\sqrt{\frac{g \sin\alpha}{l}}$. В этом случае, следовательно, достигнутая скорость пропорциональна пройденному пути. Здесь проявляется тот же закон,

который впервые предположил Галилей как закон падения. Наше исследование может быть поэтому проведено дальше, как мы это делали выше (см. стр. 217).

3. Уравнение (1) живых сил может быть применено везде там, где для движущихся тел известны *весь* пройденный путь и сила, действующая на каждом элементе пути. Но работы Эйлера, Даниэля Бернулли и Лагранжа показали, что бывают случаи, когда принцип живых сил может быть применен, хотя и не известны *условия* движения. Позже мы увидим, что имеет в этом направлении заслуги и Clairaut.

Еще Галилею было известно, что скорость тяжелого падающего тела не зависит от пройденного пути и *формы* его, а только от *высоты падения вдоль вертикали.* Гюйгенс находит, что живая сила тяжелой системы масс зависит от *вертикальных высот* этих масс. Эйлеру удается сделать еще один шаг вперед. Если какое-нибудь тело K по какому-либо закону притягивается к неподвижному центру C, то приращение живой силы при прямолинейном приближении может быть высчитано из начального и конечного расстояний (r_0, r_1). Но то же приращение получается, когда K вообще переходит из расстояния r_0 на расстояние r_1, независимо от *формы пути* KB, ибо только элементам перемещения вдоль радиуса соответствуют элементы работы и притом те же, как раньше.

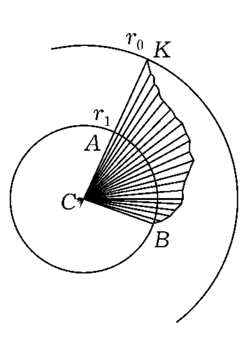


Рис. 177а

Если тело K притягивается ко многим неподвижным центрам C, C', C'', ..., то приращение живой силы зависит от начальных расстояний r_0, r_0', r_0'', ... и от конечных расстояний r_1, r_1', r_1'', ..., т. е., следовательно, от начального и конечного *положения* тела K. Даниэль Бернулли развил это рассуждение еще дальше и показал, что и в случае *взаимных* притяжений подвижных тел изменение живой силы зависит только от начальных и конечных *положений* этих тел. В деле *аналитического* изучения относящихся сюда задач больше всего сделано Лагранжем. Если соединим точку, координаты которой суть a, b, c, с точкой, координаты которой суть x, y, z, если r означает длину соединяющей их линии и α, β, γ — углы ее с осями x, y, z, то, согласно замечанию Лагранжа, имеем:

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{r} = \frac{dr}{dx}, \quad \cos\beta = \frac{y-b}{r} = \frac{dr}{dy}, \quad \cos\gamma = \frac{z-c}{r} = \frac{dr}{dz},$$

так как $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$.

Если, поэтому, $f(r) = \dfrac{dF(r)}{dr}$ есть сила, действующая между обеими точками, то составляющая ее суть:

$$X = f(r)\cos\alpha = \frac{dF(r)}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dF(r)}{dx},$$

$$Y = f(r)\cos\beta = \frac{dF(r)}{dr}\frac{dr}{dy} = \frac{dF(r)}{dy},$$

$$Z = f(r)\cos\gamma = \frac{dF(r)}{dr}\frac{dr}{dz} = \frac{dF(r)}{dz}.$$

Итак, силы составляющие суть частные производные *одной и той же* функции r или координат притягивающихся точек. В случае взаимодействия многих точек мы таким же образом имеем:

$$X = \frac{dU}{dx},$$

$$Y = \frac{dU}{dy},$$

$$Z = \frac{dU}{dz},$$

где U есть функция координат точек, которая впоследствии была названа Гамильтоном *силовой функцией.*

Преобразуем с помощью полученных воззрений и при данных условиях уравнение (1) для прямоугольных координат и мы получим $\sum\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = {}^1\!/_2\sum m(v^2 - v_0^2)$ или, так как выражение слева есть полный дифференциал,

$$\sum\int\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz\right) =$$

$$= \sum\int dU = \sum(U_1 - U_0) = \sum\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2),$$

где U_1 есть функция конечных, а U_0 *та же* функция начальных величин координат. Уравнение это нашло очень много применений. Оно выражает только тот факт познания, что при означенных условиях *работы*, а следовательно, и *живые силы зависят* только от *положений* или координат тел.

Если представим себе все массы неподвижными и только одну из них подвижной, то совершенная работа изменяется только в зависимости от U. Уравнение $U = \text{const}$ изображает так называемую поверхность уровня (или поверхность равной работы). Движение по такой поверхности не сопровождается совершением работы.

7. Принцип наименьшего понуждения

1. Гаусс провозгласил новый закон механики, принпип *наименьшего понуждения* (Crelle's Journal für Mathematik, IV, 1829, стр. 233). Он замечает, что при той форме, которую приняла механика в своем историческом развитии, динамика основывается на статике (как, например, принцип д'Аламбера на принципе возможных перемещений), между тем как следовало бы собственно ожидать, что на высшей ступени развития науки статика окажется специальным случаем динамики. И вот интересующий нас принцип Гаусса таков, что он одинаково охватывает случаи динамические и статические. В этом направлении он удовлетворяет, следовательно, требованию научной и логической эстетики. Мы заметили уже выше, что то же самое можно собственно сказать и о принципе д'Аламбера в форме Лагранжа и при приведенной выше форме его выражения. Принцип механики *существенно новый*, замечает Гаусс, не может уже быть найден, но это не исключает однако возможности открытия новых точек зрения, с которых можно было бы рассматривать механические процессы. Вот такая *новая точка зрения* и предложена в принципе Гаусса.

2. Возьмем массы m, m', ..., так или иначе связанные между собой. Будь эти массы *свободны*, они под действием приложенных сил в очень небольшие элементы времени проходили бы пути ab, $a'b'$, ..., между тем как вследствие *связей* они в тот же элемент времени описывают пути ac, $a'c'$, ... И вот, согласно принципу Гаусса, движение связанных точек происходит так, что при *действительном* движении сумма $m(bc)^2 + m'(b'c')^2 + \cdots = \sum m(bc)^2$ становится *минимумом*, т. е. оказывается меньше, чем при всяком другом движении, мыслимом при *тех же* связях. Если *каждое* движение дает большую сумму $\sum m(bc)^2$,

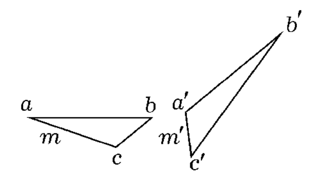


Рис. 177b

чем покой, то существует *равновесие*. Таким образом, принцип этот обнимает в равной мере как статические, так и динамические случаи.

Сумму $\sum m(bc)^2$ можно коротко назвать *суммой отклонения* или отклонением от несвязанного (свободного) движения. Что образование суммы отклонения не зависит от существующих в системе скоростей, ибо эти последние не могут изменять относительных положений a, b, c, ясно само собой.

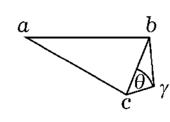


Рис. 178

3. Новый принцип может заменить принцип д'Аламбера и, как показал Гаусс, может быть из него выведен, что доказывает равноценность обоих принципов. Под действием *приложенных* сил свободная масса m совершает в элемент времени путь ab, а под действием *действительных* сил та же масса вследствие связей в тот же элемент времени совершает путь ac. Мы разлагаем ab на ac и cb. Разложение это мы совершаем для всех масс. Таким образом, силы, соответствующие путям cb, $c'b'$, ... и им пропорциональные, вследствие связей не оказывают своего действия, а в связях уравновешиваются. Выполним от конечных положений c, c', c'', ... возможные перемещения $c\gamma$, $c'\gamma'$, ... , которые с cb, $c'b'$, ... образуют углы ϑ, ϑ', ... Так как силы, пропорциональные cb, $c'b'$, ... (согласно принципу д'Аламбера), уравновешивают друг друга, то мы можем здесь применить принцип возможных перемещений. Мы имеем, следовательно,

$$\sum mcb\, c\gamma \cos\vartheta \leqq 0 \tag{1}$$

$$(b\gamma)^2 = (bc)^2 + (c\gamma)^2 - 2bc\, c\gamma \cos\vartheta$$

$$(b\gamma)^2 - (bc)^2 = (c\gamma)^2 - 2bc\, c\gamma \cos\vartheta$$

$$\sum m(b\gamma)^2 - \sum m(bc)^2 = \sum m(c\gamma)^2 - 2\sum mbc\, c\gamma \cos\vartheta. \tag{2}$$

Согласно уравнению (1), второй член правой стороны уравнения (2) может быть только равен нулю или величиной *отрицательной*. Вследствие этого сумма $\sum m(c\gamma)^2$ от вычитания этого второго члена никогда не может быть уменьшена, а может только *увеличиться*. Поэтому и левая сторона уравнения (2) представляет всегда величину положительную и, следовательно, $\sum m(b\gamma)^2$ бывает всегда больше, чем $\sum m(bc)^2$, т. е. всякое мыслимое отклонение от свободного движения бывает всегда больше того, которое происходит в действительности.

4. Обозначим путь отклонения bc для очень небольшого элемента времени τ коротко буквой s и вместе с Шефлером (Schlömilch's

«Zeitshrift für Mathematik», III, 197), заметим, что $s = \frac{\gamma\tau^2}{2}$, где γ означает ускорение, так что сумма отклонения $\sum ms^2$ может быть также выражена в следующих формах:

$$\sum ms^2 = \frac{\tau^2}{2}\sum m\gamma s = \frac{\tau^2}{2}\sum ps = \frac{\tau^4}{4}\sum m\gamma^2.$$

Здесь p означает силу, *отклоняющую* от *свободного* движения. Так как постоянный множитель не имеет влияния на определение величины минимума, то движение, можно сказать, происходит так, что

$$\sum ms^2, \tag{3}$$

$$\text{или} \quad \sum ps, \tag{4}$$

$$\text{или} \quad \sum m\gamma^2 \tag{5}$$

превращается в минимум.

5. Рассмотрим сначала несколько примеров, пользуясь третьей формой. В качестве первого примера возьмем еще раз движение ворота под действием перегрузки и воспользуемся уже неоднократно употребленными обозначениями. Нам нужно действительное ускорение γ силы P и γ' силы Q определить так, чтобы выражение $\frac{P}{g}(g-\gamma)^2 + \frac{Q}{g}(g-\gamma')^2$ превратилось в минимум или, так как $\gamma' = -\gamma\frac{r}{R}$, чтобы выражение $P(g-\gamma)^2 + Q(g+\gamma\frac{r}{R})^2 = N$ получило наименьшее значение. Примем для этой цели

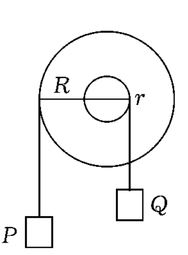


Рис. 179

$$\frac{dN}{d\gamma} = -P(g-\gamma) + Q(g+\gamma\frac{r}{R})\frac{r}{R} = 0$$

и мы найдем: $\gamma = \frac{PR-Qr}{PR^2+Qr^2}Rg$, как и в предыдущих решениях той же задачи.

В качестве второго примера разберем движение падения тела по наклонной плоскости. Здесь мы воспользуемся первой формой $\sum ms^2$. Так как мы имеем здесь дело только с *одной* массой, то мы отыскиваем то ускорение падения γ для наклонной плоскости, при котором

квадрат пути отклонения (s^2) становится минимумом. Мы имеем тогда (см. рис. 180)

$$s^2 = \left(g\frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \left(\gamma\frac{\tau^2}{2}\right)^2 - 2\left(g\frac{\tau^2}{2}\,\gamma\frac{\tau^2}{2}\right)\sin\alpha.$$

Приняв $\frac{d(s^2)}{d\gamma} = 0$ и опустив постоянные множители, получаем $2\gamma - 2g\sin\alpha = 0$ или $\gamma = g\sin\alpha$, что нам уже известно из исследований Галилея.

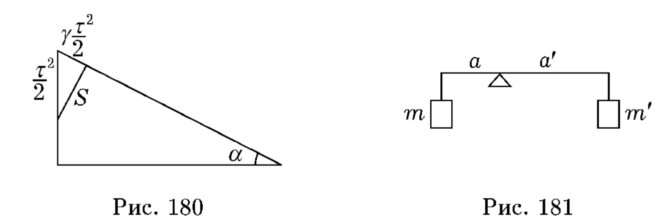


Рис. 180 Рис. 181

Приведем еще один пример в доказательство того, что принцип Гаусса объясняет и *случаи* равновесия. К плечам рычага a, a' подвешены *тяжелые* массы m, m'. Принцип требует, чтобы выражение $m(g - \gamma)^2 + m'(g - \gamma')^2$ превратилось в минимум $\gamma' = -\gamma\frac{a'}{a}$. Но если массы обратно пропорциональны плечам рычага, то $\frac{m}{m'} = \frac{a'}{a}$ и $\gamma' = -\gamma\frac{m}{m'}$. Таким образом, должно превратиться в минимум выражение $m(g-\gamma)^2 + m'\left(g + \gamma\frac{m}{m'}\right)^2 = N$. Из уравнения $\frac{dN}{d\gamma} = 0$ следует, что $m(1 + \frac{m}{m'})\gamma = 0$ или $\gamma = 0$. В этом случае, следовательно, ***равновесие*** дает ***наименьшее отклонение*** от ***свободного движения.***

Всякая *новая* связь увеличивает сумму отклонения, но это увеличение всегда минимальное. Если две или несколько систем связываются между собою, то движение происходит с *наименьшим* отклонением от движений *несвязанных* систем.

Если, например, мы соединяем несколько простых маятников в один линейный сложный маятник, то колебание этого последнего происходит с *наименьшим* отклонением от колебаний *отдельных* маятников. При размахе α простой маятник имеет ускорение на сво-

ем пути $g\sin\alpha$. Если $\gamma\sin\alpha$ означает ускорение, соответствующее тому же размаху на расстоянии 1 от оси сложного маятника, то $\sum m(g\sin\alpha - r\gamma\sin\alpha)^2$ или $\sum m(g-r\gamma)^2$ становится минимумом. Поэтому $\sum m(g-r\gamma)r = 0$ и $\gamma = g\dfrac{\sum mr}{\sum mr^2}$. Задача поэтому решается простейшим образом, но, конечно, только потому, что в принципе Гаусса содержится уже весь тот опыт, который был собран с течением времени Гюйгенсом, Якобом и Иоганном Бернулли и другими.

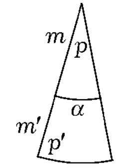


Рис. 182

6. *Увеличение* отклонения от свободного движения с каждой *новой* связью может быть иллюстрировано следующими примерами. Через два неподвижных блока A, B и один подвижный блок C переброшена нить, нагруженная на обоих концах грузом P, между тем как к подвижному блоку подвешен груз $2P+p$. Подвижный блок опускается тогда с ускорением $\dfrac{p}{4P+p}g$. Если мы остановим вращение блока A, то мы сообщим системе новую связь и отклонение от свободного движения станет больше. Подвешенный к блоку B груз следует тогда рассматривать, как массу в четыре раза большую, так как он движется с двойной скоростью. Подвижный блок опускается тогда с ускорением $\dfrac{p}{6P+p}g$. Нетрудно рассчитать, что во втором случае сумма отклонений больше, чем в первом.

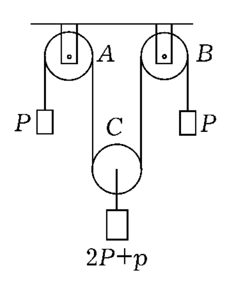


Рис. 183

Пусть некоторое число n равных грузов p подвешено на гладкой горизонтальной плоскости к n подвижным блокам, через которые изображенным на рис. 184 образом переброшена нить, носящая на свободном конце груз p. Если *все* блоки *подвижны*, то мы получаем, принимая во внимание отношение скоростей масс относительно вызывающего движение груза p, ускорение для последнего $\dfrac{4n}{1+4n}g$; если же *все* блоки *кроме одного* закреплены, то ускорение этого груза будет ${}^4\!/_5 g$. Если все $n+1$ массы подвижны, то сумма откло-

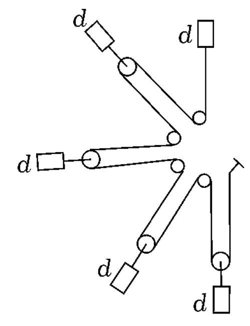


Рис. 184

нений получает величину $\frac{p}{4n+1}g$. Величина эта становится больше, если число подвижных масс n становится меньше.

7. Представим себе тело веса Q, которое может передвигаться на валиках по горизонтальной плоскости и которое ограничено наклонной плоскостью. На наклонной плоскости лежит тело веса P. Уже *инстинктивно* можно заметить, что тело P падает вниз с *большим* ускорением, если тело Q *подвижно* и может уступать ему дорогу, чем в том случае, когда оно неподвижно и, следовательно, больше препятствует его движению падения. Высоте падения h тела P должны соответствовать горизонтальная скорость v и вертикальная скорость u движения тела P и горизонтальная скорость w движения тела Q. Ввиду сохранения количества горизонтального движения, при котором действуют только внутренние силы, мы имеем:

$$Pv = Qw.$$

Далее, по очевидным геометрическим соображениям (рис. 185), имеем:

$$u = (v + w)\operatorname{tg}\alpha.$$

Скорости, следовательно, будут:

$$u = u,$$
$$v = \frac{Q}{P+Q}\operatorname{ctg}\alpha \cdot u,$$
$$w = \frac{P}{P+Q}\operatorname{ctg}\alpha \cdot u.$$

На основании принципа живых сил совершенная работа P может быть получена из уравнения

$$Ph = \frac{P}{g}\frac{u^2}{2} + \frac{P}{g}\left(\frac{Q}{P+Q}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\frac{u^2}{2} + \frac{Q}{g}\left(\frac{P}{P+Q}\operatorname{ctg}\alpha\right)^2\frac{u^2}{2}.$$

Если вывести за скобки множитель $\frac{PQ}{P+Q}\operatorname{ctg}^2\alpha$ и произвести соответствующие сокращения, получим

$$gh = \left(1 + \frac{Q}{P+Q}\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\frac{u^2}{2}.$$

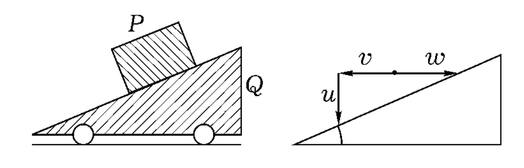


Рис. 185

Чтобы получить *вертикальное* ускорение γ, с которым проходится высота падения h, заметим, что $h = \frac{u^2}{2\gamma}$. Если введем это значение для h в последнее уравнение, мы получим

$$\gamma = \frac{(P+Q)\sin^2\alpha}{P\sin^2\alpha + Q}g.$$

При $Q = \infty$, $\gamma = g\sin^2\alpha$, как на *неподвижной* наклонной плоскости. При $Q = 0$, $\gamma = g$, как в случае свободного падения тела. При $\sin\alpha = 1$, $\gamma = g$, как в случае свободного падения тела. Когда Q имеет значение конечной величины, когда $Q = mP$, получаем

$$\gamma = \frac{(1+m)\sin^2\alpha}{m+\sin^2\alpha}g > g\sin^2\alpha, \quad \text{так как} \quad \frac{(1+m)}{m+\sin^2\alpha} > 1.$$

Итак, если сделать тело Q неподвижным, т. е. если прибавить новую связь, то отклонение от свободного движения *возрастает.*

В приведенном здесь случае мы для получения ускорения γ воспользовались принципом сохранения количества движения и принципом живых сил. Решим ту же задачу при помощи принципа Гаусса. Пусть скоростям u, v, w соответствуют ускорения γ, δ, ε. Так как только тело P в свободном состоянии имело бы *вертикальное* ускорение g, а остальные ускорения были бы равны нулю, то выражение

$$\frac{P}{g}(g-\gamma)^2 + \frac{P}{g}\delta^2 + \frac{Q}{g}\varepsilon^2 = N$$

должно быть минимумом. Так как вся задача имеет смысл только до тех пор, покуда тела P и Q соприкасаются, т. е. покуда $\gamma = (\delta+\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha$, то мы получаем

$$N = \frac{P}{g}[g - (\delta+\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha]^2 + \frac{P}{g}\delta^2 + \frac{Q}{g}\varepsilon^2.$$

Образовав производные по обеим оставшимся еще независимыми переменным δ и ε, мы получим

$$\frac{dN}{d\delta} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dN}{d\varepsilon} = 0, \quad \text{или}$$
$$-[g - (\delta + \varepsilon)\operatorname{tg}\alpha]P\operatorname{tg}\alpha + P\delta = 0 \quad \text{и}$$
$$-[g - (\delta + \varepsilon)\operatorname{tg}\alpha]P\operatorname{tg}\alpha + Q\varepsilon = 0.$$

Из этих двух уравнений непосредственно следует, что $P\delta - Q\varepsilon = 0$ и затем получаем для γ ту же величину, которую мы получили раньше.

Рассмотрим еще ту же задачу с другой точки зрения. Тело P проходит путь s под углом β к горизонту; его горизонтальная и вертикальная составляющие будут v и u; тело Q проходит путь w по горизонтальной плоскости. Составляющая сила, действующая в направлении s, есть $P\sin\beta$; принимая во внимание относительные скорости движения тел P и Q, соответствующее ускорение в направлении s будет

$$\frac{P\sin\beta}{\frac{P}{g} + \frac{Q}{g}\left(\frac{w}{s}\right)^2}.$$

Мы непосредственно получаем уравнения

$$Qw = Pv,$$
$$v = s\cos\beta,$$
$$u = v\operatorname{tg}\beta.$$

Отсюда мы получаем, что ускорение в направлении s равно

$$\frac{Q\sin\beta}{Q + P\cos\beta^2}g,$$

а соответствующее вертикальное ускорение равно

$$\gamma = \frac{Q\sin^2\beta}{Q + P\cos^2\beta}g.$$

Если воспользоваться приведенным выше уравнением $u = (v + w)\operatorname{tg}\alpha$ и вместо угловых функций β вставить функции α, то последнее выражение получит снова приведенную уже выше форму.

Таким образом, мы приходим к тому же результату, пользуясь расширенным понятием моментов инерции.

Наконец, решим ту же задачу самым прямым образом. Тело P падает по подвижной наклонной плоскости не с вертикальным ускорением g, как в случае свободного падения, а с вертикальным ускорением γ. Оно испытывает, следовательно, вертикальное противодействие $\frac{P}{g}(g-\gamma)$. Так как взаимодействие тел P и Q, если пренебречь трением, может выразиться только в виде давления S, ***нормального*** к наклонной плоскости, то

$$\frac{P}{g}(g-\gamma) = S\cos\alpha \quad \text{и} \quad S\sin\alpha = \frac{Q}{g}\varepsilon = \frac{P}{g}\delta.$$

Отсюда следует

$$\frac{P}{g}(g-\gamma) = \frac{Q}{g}\varepsilon\operatorname{ctg}\alpha, \quad \text{а, так как} \quad \gamma = (\delta+\varepsilon)\operatorname{tg}\alpha,$$

то мы получим, наконец, как раньше

$$\gamma = \frac{(P+Q)\sin^2\alpha}{P\sin^2\alpha + Q}g, \tag{6}$$

$$\delta = \frac{Q\sin\alpha\cos\alpha}{P\sin^2\alpha + Q}g, \tag{7}$$

$$\varepsilon = \frac{P\sin\alpha\cos\alpha}{P\sin^2\alpha + Q}g. \tag{8}$$

Если $P = Q$ и $\alpha = 45°$, то в этом специальном случае $\gamma = \frac{2}{3}g$, $\delta = \frac{1}{3}g$, $\varepsilon = \frac{1}{3}g$. При $\frac{P}{g} = \frac{Q}{g} = 1$ сумма отклонений равна $\frac{g^2}{3}$. Если сделать наклонную плоскость неподвижной, то соответствующая сумма будет $\frac{g^2}{2}$. Если бы тело P двигалось по неподвижной наклонной плоскости с углом наклона β, причем $\operatorname{tg}\beta = \frac{\gamma}{\delta}$, т. е. по тому же пути, по которому оно движется на подвижной плоскости, то сумма отклонений была бы только $\frac{g^2}{5}$. Но оно тогда и в действительности встречало бы меньше препятствий, чем если бы оно получило то же ускорение от *перемещения* тела Q.

8. Рассмотренные примеры достаточно показали уже, что принцип Гаусса не представляет *существенно нового* познания. Если мы применим форму (8) этого принципа, разложив все силы и ускорения по трем перпендикулярным друг к другу направлениям координат и придадим всем буквам то же значение, что в уравнении (3) (см. стр. 300), то вместо суммы отклонений $\sum m\gamma^2$ мы получим выражение

$$N = \sum m \left[\left(\frac{X}{m} - \xi \right)^2 + \left(\frac{Y}{m} - \eta \right)^2 + \left(\frac{Z}{m} - \zeta \right)^2 \right] \qquad (9)$$

и вследствие условия минимума

$$dN = 2 \sum m \left[\left(\frac{X}{m} - \xi \right) d\xi + \left(\frac{Y}{m} - \eta \right) d\eta + \left(\frac{Z}{m} - \zeta \right) d\zeta \right] = 0$$

или

$$\sum [(X - m\xi) d\xi + (Y - m\eta) d\eta + (Z - m\zeta) d\zeta] = 0.$$

Если нет никаких связей, то коэффициенты в таком случае $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, будучи отдельно приравнены нулю, дают уравнения движения. Если же связи существуют, то мы имеем между $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ те же отношения, какие мы получили выше в уравнении (3) (см. стр. 300) между δx, δy, δz. Уравнения движения получаются те же, как это сейчас же видно из рассмотрения *того же* примера, согласно принципу д'Аламбера и принципу Гаусса. Разница только та, что в первом случае мы непосредственно получаем уравнения движения, а во втором лишь через дифференцирование. Если искать выражение, которое через дифференцирование дало бы уравнения д'Аламбера, можно само собой прийти к принципу Гаусса. Отсюда ясно, что этот принцип нов только *по форме*, но не *по существу*. Даже то, что он охватывает случаи и статические, и динамические, тоже не является преимуществом, если сравнить его с принципом д'Аламбера в форме Лагранжа, на что мы указывали уже выше (см. стр. 300).

Отыскивать мистическое или *метафизическое* основание принципа Гаусса нам нет надобности. Если выражение «*наименьшее понуждение*» и весьма заманчиво, то мы все же чувствуем, что с этим названием не дано еще ничего осязательного. Ответ на вопрос, *в чем* же заключается это понуждение, мы должны искать не в метафизике, а только в фактах. Выражение (4) (см. стр. 309) или (9), которое становится минимумом, выражает *работу*, которую вызывает в элемент времени отклонение

связанного движения от свободного. *Эта работа отклонения* бывает в случае действительного движения меньше, чем при любом другом мыслимом движении.

9. Итак, мы установили, что движение определяется *работой*, мы поняли смысл принципа возможных перемещений так, что только там нет движения, где не может быть совершена никакая работа. Теперь нам совсем уже не трудно познать и обратное, а именно, что всякая работа, которая *может* быть совершена в элемент времени, бывает совершена и *в действительности*. Уменьшение работы в элемент времени вследствие связей ограничивается поэтому частью, уничтоженной *противоположной работой*. Таким образом, и здесь перед нами известный нам уже факт, представший только с новой стороны.

Это отношение мы можем найти уже в простейших случаях. Пусть на массы m и m в точке A действуют силы — на первую сила p и на вторую сила q. Если мы соединим их, то на массу $2m$ будет действовать равнодействующая сила r. Если AC, AB означают пути в элемент времени для свободных масс, то путь связанной (двойной) массы будет $AO = {}^1\!/_2 AD$. Сумма отклонений будет $m(OB^2 + OC^2)$. Она меньше, чем она была бы в том случае, если бы масса в конце элемента времени оказалась в точке M или даже в точке N, лежащей вне линии BC, что можно доказать простейшим геометрическим построением. Сумма пропорциональна выражению $\frac{p^2 + q^2 + 2pq\cos\vartheta}{2}$, которое в случае равных и противоположно направленных сил становится равным $2p^2$, а в случае равных и равно направленных сил становится равным нулю.

Пусть на одну и ту же массу действуют две силы p и q. Пусть сила q разлагается на силы r и s параллельно и перпендикулярно к направлению действия p. Работы в элемент времени пропорциональны квадратам сил и без связей могут быть выражены через $p^2 + q^2 = p^2 + r^2 + s^2$. Если действие силы r прямо противоположно действию силы p, то наступает уменьшение работы и сумма равна $(p - r)^2 + s^2$. Свойства, лежащие в основе принципа Гаусса, содержатся уже в принципе сложения сил или в принципе независимости сил друг от друга. Это нетрудно заметить, если представить себе все ускорения выполненными одновременно. Стоит отбросить расплывчатое и туманное выражение, чтобы исчез и метафизический налет принципа. Мы видим тогда простой факт; мы *разочарованы*, но зато *нам все стало ясно*.

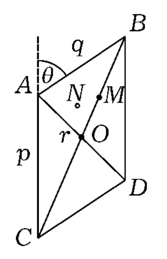


Рис. 186

10. Изложенное здесь разъяснение насчет закона Гаусса в большей своей части содержится уже в цитированной выше работе Шеффлера. Те взгляды последнего, с которыми мы не совсем были согласны, мы молча здесь видоизменили. Так, например, мы не можем признать за *новый* выставленный им самим принцип, так как и по форме своей и по смыслу он *тождественен* с принципом д'Аламбера–Лагранжа.

Глубокие исследования насчет принципа Гаусса содержатся в статье Липшица «Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges» (Borchadt, Journal f. reine u. angew. Mathematik LXXXII, 1877, стр. 316). У другого же автора К. Hollefreund'a «Anwendungen des Gauss'schen Princips vom kleinsten Zwange» (Berlin, 1897) мы находим много элементарных примеров.

11. Сказанное выше в § 9 нуждается еще в некотором дополнении. Если массы системы не имеют никакой скорости, то действительные движения происходят только в направлении возможной работы, совместимой с условиями системы (C. Neumann, Ber. d. Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. XLIV, 1892, стр. 184). Но если массы обладают скоростями, которые могут быть также направлены в сторону, противоположную действию приложенных сил, то движения, определенные скоростями и силами, накладываются друг на друга (Статья Больцмана в журнале Wiedemann's Ann., LVII, 1896, стр. 45). Принцип же максимума Оствальда («Lehrbuch d. allgem. Chemie». II, 1, 1892, стр. 37), согласно превосходному общепонятному замечанию Zemplén'a («Ann. d. Physik», X, 1903, стр. 428) не пригоден для описания *механических* процессов, потому что в нем не принята во внимание *инерция* масс. Тем не менее остается правильным то, что осуществляются те работы, которые совместимы с существующими условиями. В настоящей книге, написанной еще до 1882 года, не могли быть, конечно, приняты во внимание зачатки энергетической механики, появившиеся лишь десять лет спустя. Я не могу, впрочем, отнестись с тем пренебрежением к этим попыткам, с которым некоторые отнеслись к ним. И развитие старой «классической» механики до современной ее формы не было свободно от тех или других аналогичных блужданий или ошибок. Точка зрения Гельма (Helm «Die Energetik», 1898, стр. 205–252) вряд ли может вызвать существенные возражения. См. мое изложение о равной правильности понятий работы и силы («Ber d. Wien. Akad», December, 1873), как и многие места «Механики», в особенности стр. 217 и след.

8. Принцип наименьшего действия

1. Мопертюи в 1747 году провозгласил принцип, который он назвал принципом *наименьшего действия* («Principe de la moindre quantité d'action»). Этот принцип он называет особенно достойным мудрости Творца. В качестве меры этого действия он рассматривает — правда, непонятно, на *каком основании* — произведение из массы на скорость и путь тела, mvs. Под массой и скоростью можно понимать определенные величины, но этого нельзя сказать о пути, если не указано, в какое время этот путь проходится. Если же имеется в виду единица времени, то различение между путем и скоростью представляется в случаях, рассматриваемых Мопертюи, странным. Мопертюи не выяснил себе, по-видимому, принципа живых сил и принципа возможных перемещений, смешивал их и только потому пришел к этому неясному и расплывчатому выражению. Рассмотрим его подробнее и тогда неясность его станет еще очевиднее.

2. Посмотрим, как Мопертюи применяет свой принцип. Пусть даны две неупругие массы M, m, пусть C и c скорости их до удара и u их общая скорость после удара. Заменяя здесь пути скоростями, Мопертюи полагает, что при изменении скоростей в ударе «действие» равно минимуму. Таким образом

$$M(C-u)^2+m(c-u)^2 \quad \text{есть минимум}$$
$$\text{и} \quad M(C-u)+m(c-u)=0.$$

Следовательно,

$$u=\frac{MC+mc}{M+m}.$$

В случае удара упругих масс мы имеем при тех же обозначениях и если V и v обозначают обе скорости после удара

$$M(C-V)^2+m(c-v)^2 \quad \text{есть минимум}$$

и

$$M(C-V)\,dV+m(c-v)\,dv=0. \tag{1}$$

На том основании, что скорость приближения до удара равна скорости удаления обеих масс после удара, мы имеем

$$C - c = -(V - v)$$

$$\text{или}\quad C + V - (c + v) = 0 \tag{2}$$

$$\text{и}\quad dV - dv = 0. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (2) и (3) очень легко получить известные выражения для V и v. Отсюда ясно, что оба эти случая можно рассматривать, как процессы, в которых наименьшее изменение живой силы может произойти через противодействие, т. е. через *наименьшую противоположную работу.* Оба случая, следовательно, подходят под принцип Гаусса.

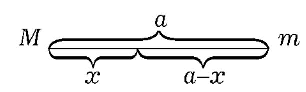


Рис. 187

3. Своеобразным образом Мопертюи выводит *закон рычага.* Две массы M и m находятся на стержне a, который точкой вращения делится на две части: x и $a - x$. *Если стержню сообщается вращательное движение*, то скорости и пути пропорциональны плечам рычага, и мы должны получить

$$Mx^2 + m(a - x)^2 \quad \text{есть минимум}$$

$$\text{и}\quad Mx - m(a - x) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$x = \frac{ma}{M + m},$$

что на самом деле бывает *в случае равновесия.* Против этого мы должны возразить следующее: во-первых, массы без тяжести и без сил, как их молча предполагает Мопертюи, *всегда* бывают в равновесии; во-вторых, из этого вывода вытекало бы, что принцип наименьшего действия осуществляется в действительности *только в случае равновесия*, доказательство чего вовсе не входило же в намерения автора.

Чтобы по возможности согласовать обсуждение этого случая с предыдущим, мы должны были бы принять, что *тяжелые* массы M и m постоянно сообщают друг другу наивозможно меньшее изменение живой силы. Если мы коротко обозначим буквами a, b плечи рычага, буквами u и v — достигнутые в единицу времени скорости и буквой g —

ускорение тяжести, мы получим

$$M(g-u)^2 + m(g-v)^2 \quad \text{есть минимум или}$$
$$M(g-u)du + m(g-v)dv = 0.$$

Вследствие же связи рычага мы имеем

$$\frac{u}{a} = -\frac{v}{b},$$
$$du = -\frac{a}{b}dv.$$

Из этих уравнений сейчас же правильно следует:

$$u = a\frac{Ma - mb}{Ma^2 + mb^2}g, \quad v = -b\frac{Ma - mb}{Ma^2 + mb^2}g,$$

$$\text{а в случае равновесия:} \quad u = v = 0$$
$$Ma - mb = 0.$$

Таким образом, и этот вывод, если его хотят проверить, приводит к принципу Гаусса.

4. Рассматривает Мопертюи, по примеру Ферма и Лейбница, со своей точки зрения и *движение света*, но он здесь вкладывает в понятие наименьшего действия *совсем другой смысл*. Для преломления света выражение $mAR+nRB$ должно быть минимумом, где AR и RB означают пути света в первой и второй среде, а m и n — соответствующие скорости. Правда, если определяют R соответственно условию минимума, то получают $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n}{m} = \mathrm{const}$, но раньше «действие» заключалось в *изменении* выражений масса×скорость×путь, а здесь оно заключается в *сумме* их. Раньше брались пути в *единицу времени*, а теперь *вообще* пройденные пути. Не должны ли мы рассматривать, как минимум, выражение $mAR - nRB$ или $(m-n)(AR - RB)$ и почему нет? Если же принять точку зрения Мопертюи, то мы получаем не действительные, а обратные величины скоростей света.

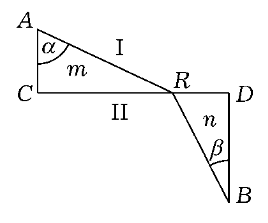


Рис. 188

Отсюда ясно, что *о принципе* Мопертюи собственно не может быть и речи, а перед нами только неясная *символическая формула*, которая

при помощи большой неточности и некоторой натяжки смешивает в одну кучу различные известные случаи. Было необходимо на этом остановиться, так как работа Мопертюи все еще окружена известным доисторическим ореолом. Получается почти такое представление, будто в механику внесено кое-что из благочестивой веры церкви. При всем том *стремление* Мопертюи бросить более широкий взгляд не осталось совсем без успеха, хотя его силы и оказались недостаточными: его попытки *послужили толчком* для Эйлера, а может быть и для Гаусса.

5. Эйлер полагает, что можно понять явления природы как из *действующих причин*, так и из *конечной цели*. Если стать на последнюю точку зрения, то мы заранее примем, что каждое явление природы представляет некоторый *максимум* или *минимум*. Какого рода этот максимум или минимум, метафизическими рассуждениями, правда, узнать трудно. Но если решать, например, задачи механики обыкновенным образом, то можно при достаточной внимательности найти выражение, которое во всех случаях становится максимумом или минимумом. Таким образом, Эйлер не впадает в ошибки под влиянием своего пристрастия к метафизике и размышляет *гораздо более научно*, чем Мопертюи. Он ищет выражение, вариация которого, будучи приравнена к нулю, дает обычные уравнения механики.

Для *одного* тела, движущегося под действием сил, Эйлер находит искомое выражение в форме $\int v\,ds$, где ds означает элемент пути, а v — соответствующую ему скорость. Именно для пути, по которому тело *действительно* движется, выражение это становится меньше, чем для всякого другого, бесконечно близкого, соседнего пути с теми же начальными и конечными точками, который мы пожелали бы *навязать* телу. Можно поэтому и наоборот, *отыскивая* путь, на котором $\int v\,ds$ становится минимумом, определить самый этот путь. Конечно — и Эйлер считает это само собою понятным — задача сделать $\int v\,ds$ минимумом имеет смысл только в том случае, если v зависит от места элемента ds, т. е. если к действующим силам применим принцип живых сил или если существует силовая функция, т. е. если v есть просто функция координат. В случае движения по плоскости наше выражение приняло бы тогда форму

$$\int \varphi(x, y)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

В простейших случаях принцип Эйлера легко проверить. Если не действуют никакие силы, то скорость v остается постоянной и кривая дви-

жения превращается в прямую и тогда $\int v\,ds = v\int ds$, без сомнения, *меньше*, чем для всякой другой кривой между *теми же* крайними точками. Тело, которое без сил движется без трения по кривой поверхности, тоже сохраняет на ней свою скорость и описывает на поверхности *кратчайшую* линию.

Рассмотрим движение брошенного тела по параболе ABC. И здесь $\int v\,ds$ меньше, чем для всякой другой соседней кривой и даже чем для прямой ADC между теми же крайними точками. Скорость зависит здесь только от вертикальной высоты, которую пробежало тело; она, следовательно, остается одной и той же для всех кривых той же высоты над OC. Если разделим кривые системой горизонтальных прямых линий на соответствующие элементы, то для верхних частей прямой AD элементы, которые нужно помножить на одну и ту же скорость v, окажутся меньше, чем для кривой AB, тогда как для нижних частей DB, BC это отношение становится обратным, а так как именно здесь мы имеем большие скорости v, то сумма для ABC все же получается меньшая.

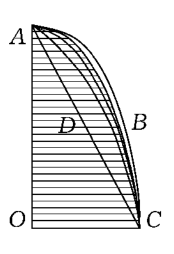


Рис. 189

Если переместим начало координат в точку A, будем считать направление абсциссы x вертикально вниз положительным и обозначим через y перпендикулярную к ней ординату, то мы должны приравнять минимуму выражение

$$\int_0^x \sqrt{2g(a+x)}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

где g есть ускорение тяжести и a — глубина падения, соответствующая начальной скорости. Согласно вариационному исчислению, условием минимума является

$$\frac{\sqrt{2g(a+x)}\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} = C \quad \text{или}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C}{\sqrt{2g(a+x)-C^2}} \quad \text{или}$$

$$y = \int \frac{C\,dx}{\sqrt{2g(a+x) - C^2}}$$

и $y = \frac{C}{g}\sqrt{2g(a+x) - C^2} + C^1$, где C, C^1 означают постоянные интегрирования. При $x = 0$, $\frac{dx}{dy} = 0$ и $y = 0$, $C = \sqrt{2ga}$ и $C^1 = 0$, и тогда $y = 2\sqrt{ax}$. Мы получаем, следовательно, этим путем известную параболу, описываемую брошенным телом.

6. Лагранж впоследствии *вполне определенно* указал на то, что принцип Эйлера применим только в тех случаях, в которых применим принцип живых сил. Якоби показал, что невозможно собственно утверждать, что для действительного движения $\int v\,ds$ есть *минимум*, а можно утверждать только то, что *вариация* этого выражения при переходе к бесконечно близкому соседнему пути становится равна нулю. Это условие *в общем* совпадает с максимумом или минимумом, но оно может иметь место и тогда, когда минимума или максимума нет и, в частности, свойство минимума имеет известные пределы. Если, например, тело под действием толчка движется по шаровой поверхности, то оно описывает наибольший круг, в общем, кратчайшую линию. Но если длина наибольшего круга превышает 180°, то тогда, как это не трудно доказать, существуют более короткие, бесконечно близкие, соседние пути между конечными точками.

7. До сих пор было доказано только то, что, приравнивая вариацию выражения $\int v\,ds$ нулю, получают обыкновенные уравнения движения. Так как однако свойства движения тел или соответствующих путей всегда могут быть выражены через дифференциалы, приравненные нулю, так как далее условие, чтобы вариация интеграла была равна нулю, тоже выражается через дифференциал, приравненный нулю, то возможно, без сомнения, придумать еще *многие другие* интегралы, вариации которых дают обыкновенные уравнения движения, но которые из-за этого вовсе не *должны* иметь особого *физического* значения.

8. При всем том остается странным то, что столь *простое* выражение, как $\int v\,ds$, имеет упомянутое свойство. Попробуем поэтому установить *физический* смысл его. При этом нам будут весьма полезны аналогии между движением масс и движением света, как и между движением масс и равновесием нити — аналогии, замеченные Иоганном Бернулли и Мебиусом.

Тело, на которое не действует никакая сила, которое, следовательно, сохраняет постоянными скорость и направление, описывает прямую линию. Луч света в однородной среде (с равным везде показателем преломления) описывает прямую линию. Нить, на которую действуют силы только в конечных ее точках, образует прямую линию.

Тело, которое движется по криволинейному пути от A к B и скорость которого $v = \varphi(x, y, z)$ зависит от координат, описывает между A и B кривую, для которой $\int v\,ds$ в общем образует минимум. Ту же кривую может описывать луч света, идущий от A к B, если показатель преломления среды $n = \varphi(x, y, z)$ есть та же функция координат, и в этом случае $\int n\,ds$ становится минимумом. Ту же кривую, наконец, может образовать нить, протянутая от A к B, если напряжение ее $S = \varphi(x, y, z)$ есть та же функция координат, и в этом случае $\int S\,ds$ тоже становится минимумом.

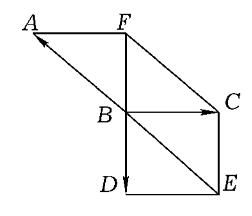


Рис. 190

Из случая *равновесия нити* легко вывести соответствующий случай *движения масс.* Пусть на элемент нити ds действуют на обоих его концах напряжения S, S' и, если на единицу длины нити приходится сила P, еще сила $P\,ds$. Обозначим эти три силы по величине и направлению отрезками линии BA, BC, BD. Все три силы уравновешивают друг друга. Если на элемент пути ds вступает теперь тело со скоростью v, изображенной по величине и направлению отрезком линии AB, и здесь получает составляющую скорости $BF = -BD$, то оно движется отсюда далее со скоростью $v^1 = BC$. Если Q есть ускоряющая сила противоположного направления, чем сила P, то на единицу времени приходится ускорение Q, на единицу длины нити $\frac{Q}{v}$ и на элемент нити приращение скорости $\frac{Q}{v}\,ds$. Движение, следовательно, происходит *по кривой нити*, если между силами P и напряжениями S на нити, с одной стороны, и ускоряющими силами Q, которые действуют на массу, и их скоростями v, с другой стороны, устанавливаем отношение:

$$P : -\frac{Q}{v} = S : v.$$

Знак «$-$» обозначает противоположность направлений сил P и Q.

Нить, замкнутая в круг, находится в равновесии, если между постоянным повсюду напряжением нити S и приходящейся на единицу длины ее радиальной силой P, действующей в направлении от центра, существует отношение $P = \frac{S}{r}$, где r есть радиус круга. Тело движется в круге с постоянной скоростью v, если между скоростью и действующей в направлении к центру вдоль радиуса ускоряющей силой Q существует отношение

$$\frac{Q}{v} = \frac{v}{r} \quad \text{или} \quad Q = \frac{v^2}{r}.$$

Тело движется с *постоянной скоростью* v по произвольной кривой, если на него постоянно действует в направлении к центру кривизны элемента кривой ускоряющая сила $Q = \frac{v^2}{r}$. Нить с постоянным напряжением S образует любую кривую, если на единицу ее длины действует в направлении от центра кривизны элемента сила $P = \frac{S}{r}$.

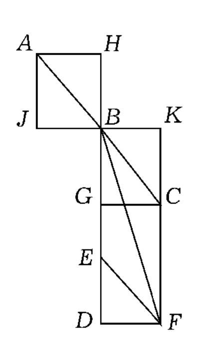


Рис. 191

В теории *движения света* нет понятия, аналогичного понятию силы. Вывод соответствующего *движения света* из *равновесия нити* или *движения масс* приходится поэтому сделать иным образом. Пусть масса движется со скоростью $AB = v$ (рис. 191). Вдоль BD действует сила, обуславливающая приращение скорости BE; сложение скоростей $BC = AB$ и BE дает новую скорость $BF = v'$. Если мы разложим скорости v, v' на их составляющие параллельно и перпендикулярно к той силе, то мы заметим, что действием силы *изменяется* только *параллельная составляющая*. Но в таком случае, обозначив через k перпендикулярную составляющую и через α, α' углы, образуемые скоростями v и v' с направлением силы, получаем

$$k = v \sin\alpha,$$
$$k = v' \sin\alpha',$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v'}{v}.$$

Представим себе *луч света*, который в направлении v проходит через перпендикулярную к направлению силы преломляющую плоскость

и переходит при этом из среды с показателем преломления n в среду с показателем преломления n', причем $\frac{n}{n'} = \frac{v}{v'}$. Этот луч света описывает тогда тот же путь, как и представленное нами раньше тело. Когда мы хотим *движением света* подражать *движению масс* (т. е. получить движение по той же кривой), мы должны везде сделать показатели преломления n пропорциональными скоростям. Чтобы вывести показатели преломления из сил, мы должны сначала исходить из скорости

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = P\,dq \quad \text{и аналогично} \quad d\left(\frac{n^2}{2}\right) = P\,dq,$$

где P означает силу, а dq — элемент пути в направлении действия этой силы. Если ds означает элемент пути и α — угол его с направлением силы, то мы имеем

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = P\cos\alpha\,ds, \quad d\left(\frac{n^2}{2}\right) = P\cos\alpha\,ds.$$

Для пути брошенного тела мы получили при приведенных выше условиях $y = 2\sqrt{ax}$. Этот же путь по параболе может описывать луч света, если для показателей переломления принять закон $n = \sqrt{2g(a+x)}$.

9. Рассмотрим теперь поближе, какая связь существует между исследуемым нами свойством минимума и *формой* кривой. Возьмем сначала ломаную прямую ABC, которая пересекает прямую MN, пусть $AB = s$, $BC = s'$, и отыщем условие, при котором $vs + v's'$ для прямой, проходящей через неподвижные точки A и B, становится минимумом, причем v и v' имеют выше и ниже линии MN различную, но постоянную величину. Если мы переместим точку B на бесконечно малую величину к D, то новая ломаная линия, соединяющая точки A и C, остается параллельной прежней, как это символически изображено на рис. 192. Выражение $vs + v's'$ увеличивается тогда на величину

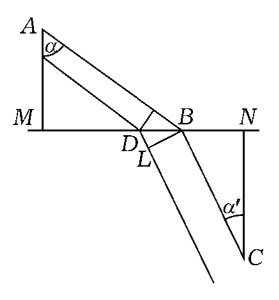


Рис. 192

$$-vm\sin\alpha + v'm\sin\alpha',$$

где $m = DB$, или на величину

$$-v\sin\alpha + v'\sin\alpha'.$$

Таким образом, условие минимума есть

$$-v\sin\alpha + v'\sin\alpha' = 0,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v'}{v}.$$

Совершенно аналогично мы получаем, что для того, чтобы выражение $\frac{s}{v} + \frac{s'}{v'}$ стало минимумом, необходимо, чтобы

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{v}{v'}.$$

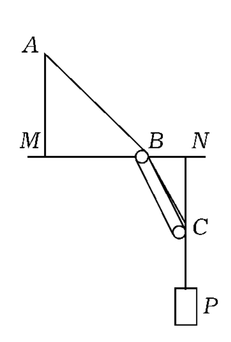


Рис. 193

Рассмотрим сначала *нить*, натянутую в направлении ABC. Пусть напряжения ее S и S' выше и ниже линии MN различны. Дело идет тогда здесь о минимуме $Ss + S's'$. Чтобы сделать случай вполне наглядным, мы представим себе, что между точками A и B нить натянута один раз, а между точками B и C три раза и к концу ее привешен груз P. Тогда мы имеем $S = P$, $S' = 3P$. Если мы переместим точку B на расстояние m, то *уменьшение* выражения $Ss + S's'$ означает увеличение *работы*, которую совершает при этом подвешенный груз P. Если $-Sm\sin\alpha + S'm\sin\alpha' = 0$, то работа совсем не совершается. Таким образом, с *минимумом* $Ss + S's'$ совпадает *максимум* совершенной работы, и, таким образом, принцип наименьшего действия представляет собой в данном случае лишь *другую форму* принципа возможных перемещений.

Теперь пусть ABC есть *луч света*, скорости которого v и v' выше и ниже MN относятся между собой примерно как 3 : 1. Луч света движется между A и B так, что он от A до B доходит в минимум времени. Объясняется это простой физической причиной. Свет распространяется от A до B в форме элементарных волн различными путями. Но вследствие периодичности света волны в общем разрушают друг друга и результат дают только те волны, которые достигают до B в равные времена, следовательно, волны с равными фазами. Происходит все это *только* с теми волнами, которые достигают B *минимальным* путем и ближайшими к нему соседними путями. Вследствие этого $\frac{s}{v} + \frac{s'}{v'}$

есть минимум для пути, действительно проходимого светом. Так как показатели преломления n обратно пропорциональны скоростям v, то и $ns + n's'$ есть минимум.

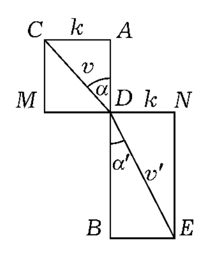


Рис. 194

При изучении *движения масс* условие, чтобы $vs + v's'$ было минимумом, представляется нам чем-то *новым.* Если при переходе массы через уровень MN скорость ее v под действием силы, направленной по DB, возрастает до v', то для действительно пройденного пути будет $v \sin\alpha = v' \sin\alpha' = k$. *Это уравнение, представляющее вместе с тем условие минимума, выражает не что иное, как только то, что испытывает изменение только составляющая скорости, параллельная направлению действия силы, между тем как составляющая, перпендикулярная к этому направлению, k, остается без изменения.* Таким образом, и здесь принцип Эйлера дает лишь выражение известному привычному факту в новой форме.

К сказанному выше, написанному в 1883 году, мне остается прибавить следующее. Ясно, что принцип наименьшого действия, как и все прочие принципы механики, исходящие из минимума, выражает одно, а именно, что в соответствующих случаях *происходит только то*, что при данных условиях *может происходить*, что ими *определено* и притом *однозначно* определено. Вывод случаев равновесия из однозначной определенности мы рассмотрели уже выше и мы к нему вернемся еще в другом месте. Но только по отношению к случаям динамическим значение *однозначной определенности* лучше и *выразительнее*, чем у меня, изложено у И. Петцольдта в его сочинении «Maxima, minima und Oekonomie» (Altenburg, 1891) («Максимум, минимум и экономия»). Он говорит там (стр. 11): «Во всех движениях, сдедовательно, можно рассматривать *действительные* пути, как исключительные случаи среди *бесконечного множества мыслимых путей.* Но аналитически это означает не что иное, как только следующее: должно быть всегда возможно найти выражения, дающие дифференциальные уравнения движения, когда вариация их приравнивается нулю, ибо эта вариация исчезает только тогда, когда интеграл получает *единственную в своем роде* величину».

И действительно, мы видим, что в рассмотренном только что примере приращение скорости бывает однозначно определено только в направлении силы и что приращений составляющих скорости, перпенди-

кулярных к действующей силе, мыслимо бесконечное множество равновозможных, но они, следовательно, исключаются принципом однозначной определенности. Я вполне согласен с Петцольдтом, когда он говорит: «Таким образом, принципы Эйлера и Гамильтона и — не менее того — принцип Гаусса представляют собою не что иное, как *аналитические выражения для того факта опыта, что процессы природы суть процессы однозначно определенные*». Решающим здесь является тот характер минимума, что он «*единственный в своем роде*».

Приведу еще здесь цитату из моей заметки, напечатанной в ноябрьском номере 1873 года пражского журнала Lotos: «Принципы равновесия и движения в механике могут быть выражены, как законы изопериметрические. Но антропоморфное воззрение при этом вовсе не существенно; примером может служить принцип возможной скорости. Раз мы познали, что скорость определяется работой A, то нетрудно видеть, что там, где при переходе системы во все соседние положения работа *отсутствует*, не может быть достигнута и никакая скорость и, следовательно, существует равновесие. Условие равновесия, следовательно, будет здесь $\delta A = 0$, причем A вовсе не должно быть непременно максимумом или минимумом. Эти законы вовсе не ограничены именно механикой, а они могут иметь весьма общий характер. Если изменение формы явления B зависит от явления A, то условием, чтобы явление B имело известную форму, будет $\delta A = 0$».

Этим я, очевидно, признаю, что считаю возможным находить аналогии принципа наименьшего действия в самых различных областях физики, не идя окольным путем через механику. Да я и вижу в механике не столько объясняющую основу для всех остальных областей, сколько скорее — вследствие того, что она опередила формально эти последние — превосходный образец для них. В этом пункте мой взгляд с виду мало, но в действительности существенно отличается от взгляда большинства физиков. Для объяснения я укажу еще на мою книгу «Wärmelehre» («Учение о теплоте»), в особенности на страницы 192, 318, 356, как и на статью «Ueber das Prinzip der Vergleichung in der Physik» («Принцип сравнения в физике») (Populär-wissenchaftl. Vorlesungen, стр. 251). Интересны по этому вопросу следующие статьи: C. Neumann. «Das Ostwald'sche Axiom des Energieumsatzes» (К. Нейманн. «Аксиома Оствальда относительно превращения энергии») (Berichte d. K. Sächs. Gesellschaft, 1892, стр. 184) и Ostwald. «Ueber das Princip des ausgezeichneten Falles» (В. Оствальд. «О принципе исключительного случая», Ibid. 1893, стр. 600).

10. Если мы переходим от конечной ломаной прямой к элементам кривой, то приведенное выше условие минимума

$$-v\sin\alpha + v'\sin\alpha' = 0$$

можно писать и так:

$$-v\sin\alpha + (v+dv)\sin(\alpha+d\alpha) = 0$$
$$\text{или}\quad d(v\sin\alpha) = 0$$
$$\text{или, наконец,}\quad v\sin\alpha = \text{const}.$$

Соответственно мы получаем для случаев движения света

$$d(n\sin\alpha) = 0,\quad n\sin\alpha = \text{const}.$$
$$d\left(\frac{\sin\alpha}{v}\right) = 0,\quad \frac{\sin\alpha}{v} = \text{const}.$$

и для равновесия нити

$$d(S\sin\alpha) = 0,\quad S\sin\alpha = \text{const}.$$

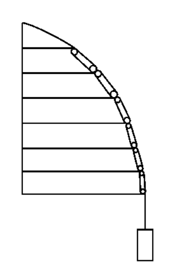
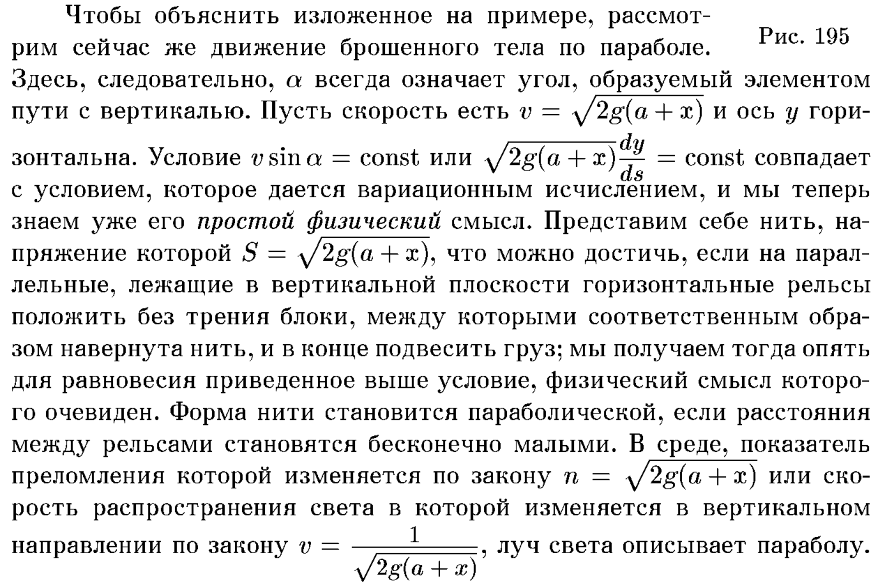


Рис. 195



Чтобы объяснить изложенное на примере, рассмотрим сейчас же движение брошенного тела по параболе. Здесь, следовательно, α всегда означает угол, образуемый элементом пути с вертикалью. Пусть скорость есть $v = \sqrt{2g(a+x)}$ и ось y горизонтальна. Условие $v\sin\alpha = \text{const}$ или $\sqrt{2g(a+x)}\dfrac{dy}{ds} = \text{const}$ совпадает с условием, которое дается вариационным исчислением, и мы теперь знаем уже его *простой физический* смысл. Представим себе нить, напряжение которой $S = \sqrt{2g(a+x)}$, что можно достичь, если на параллельные, лежащие в вертикальной плоскости горизонтальные рельсы положить без трения блоки, между которыми соответственным образом навернута нить, и в конце подвесить груз; мы получаем тогда опять для равновесия приведенное выше условие, физический смысл которого очевиден. Форма нити становится параболической, если расстояния между рельсами становятся бесконечно малыми. В среде, показатель преломления которой изменяется по закону $n = \sqrt{2g(a+x)}$ или скорость распространения света в которой изменяется в вертикальном направлении по закону $v = \dfrac{1}{\sqrt{2g(a+x)}}$, луч света описывает параболу.

Если мы в такой среде примем $v = \sqrt{2g(a+x)}$, то луч света опишет

циклоиду, для которой не $\int\sqrt{2g(a+x)}\,ds$, а $\int\dfrac{ds}{\sqrt{2g(a+x)}}$ будет минимумом.

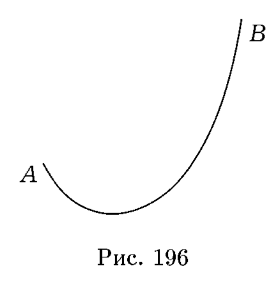


Рис. 196

11. При сравнении равновесия нити с движением масс можно вместо многократно навернутой нити воспользоваться простой однородной нитью, если только связать ее с соответствующей системой сил, создающей требуемые напряжения. Нетрудно заметить, что системы сил, делающие из напряжения и из скорости *одинаковые* функции координат, сами по себе должны быть *различны*. Если мы имеем, например, дело с силой тяжести, то $v = \sqrt{2g(a+x)}$. Но нить под действием тяжести образует цепную линию, для которой напряжение выражается формулой $S = m - nx$, причем m и n суть величины постоянные. Существенное условие аналогии между равновесием нити и движением масс заключается в следующем: если на нить действуют силы, которым соответствует силовая функция U, то в случае равновесия для нее существует легко доказываемое уравнение $U + S = \text{const}$. *Физическая* интерпретация принципа наименьшего действия, данная выше для случаев простых, может быть удержана и в случаях более сложных, если только представляют себе множество поверхностей равного напряжения, равной скорости или равных показателей преломления — поверхностей, делящих нить, пройденное в движении расстояние или путь светового луча на элементы, а под α подразумевают угол, образуемый этими *элементами* с перпендикулярами, опущенными на соответствующие поверхности. Лагранж распространил принцип наименьшего действия на систему масс и выразил его в следующей форме

$$\delta\sum m\int v\,ds = 0.$$

Но связью масс не устраняется принцип живых сил, составляющий существенную основу принципа наименьшего действия, а потому принцип применим и физически понятен и в этом случае.

9. Принцип Гамильтона

1. Было уже замечено, что можно придумать *различные* выражения такого характера, что приравнение к нулю их вариаций дает обычные

уравнения движения. Такое выражение содержит принцип Гамильтона

$$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} (U + T)\, dt = 0$$

или

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} (\delta U + \delta T)\, dt = 0,$$

где δU и δT означают вариации работы и живой силы, которые однако для начального и конечного момента времени должны быть равны нулю. Принцип Гамильтона легко вывести из принципа д'Аламбера и, наоборот, последний из первого, ибо они, собственно говоря, тождественны и различны только по форме[1].

2. Оставив в стороне более подробные исследования, мы воспользуемся для доказательства тождества обоих принципов *примером* и именно тем, которым мы уже пользовались для иллюстрации принципа д'Аламбера. Рассмотрим движение ворота под действием перегрузки. Вместо *действительного* движения ворота мы можем представить себе осуществленным в то же время движение, бесконечно мало от него *различающееся* и в начальный и в конечный момент движения точно совпадающее с действительным.

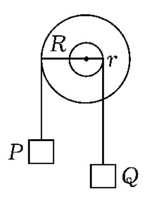


Рис. 197

Вследствие этого получаются в каждый элемент времени dt изменения работы (δU) и живой силы (δT), тех величин U и T, которые существовали при действительном движении. Но приведенное выше интегральное выражение для действительного движения равно нулю и может, следовательно, служить также для определения этого движения. Если в элемент времени dt угол вращения изменяется на α сравнительно с тем, который был бы при действительном движении, то соответствующее изменение работы есть

$$\delta U = (PR - Qr)\alpha = M\alpha.$$

Для угловой скорости ω живая сила есть

$$T = \frac{1}{g}(PR^2 + Qr^2)\frac{\omega^2}{2},$$

[1]См., например, Kirchhoff. «Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik», стр. 25, и Jakobi. «Vorlesungen über Dynamik», стр. 58.

а для вариации $\delta\omega$ имеем

$$\delta T = \frac{1}{g}(PR^2 + Qr^2)\omega\delta\omega.$$

Но если угол вращения изменяется в элемент времени dt на α, то $\delta\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ и

$$\delta T = \frac{1}{g}(PR^2 + Qr^2)\omega\frac{d\alpha}{dt} = N\frac{d\alpha}{dt}.$$

Выражение интеграла имеет, следовательно, следующую форму

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[M\alpha + N\frac{d\alpha}{dt}\right]dt = 0.$$

Так как

$$\frac{d}{dt}(N\alpha) = \frac{dN}{dt}\alpha + N\frac{d\alpha}{dt},$$

то

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(M - \frac{dN}{dt}\right)\alpha\,dt + \big(N\alpha\big)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Вторая часть однако левой стороны уравнения отпадает, так как мы приняли, что в начале и в конце движения $\alpha = 0$. Мы получаем поэтому

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(M - \frac{dN}{dt}\right)\alpha\,dt = 0.$$

Так как приращение α в каждый элемент времени произвольно, то последнее уравнение существует тогда, когда вообще

$$M - \frac{dN}{dt} = 0.$$

Если принять в соображение значение букв, то нетрудно видеть, что это дает нам известное уже выражение

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{PR - Qr}{PR^2 + Qr^2}g.$$

Можно и наоборот, от уравнения, правильного для всякого *возможного* перемещения

$$\left(M - \frac{dN}{dt}\right)\alpha = 0,$$

которое дает принцип д'Аламбера, перейти к выражению

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(M - \frac{dN}{dt}\right)\alpha\, dt = 0$$

и от этого выражения перейти к выражению

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(M\alpha + N\frac{d\alpha}{dt}\right) dt - (N\alpha)\Big|_{t_0}^{t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(M\alpha + N\frac{d\alpha}{dt}\right) dt = 0.$$

3. Возьмем другой, еще более простой пример — движение падающего тела по вертикали. Для каждого бесконечно малого перемещения s существует уравнение $\left(mg - m\frac{dv}{dt}\right)s = 0$, в котором буквы имеют обычное значение. Вследствие этого существует также уравнение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(mg - m\frac{dv}{dt}\right)s\, dt = 0.$$

Вследствие отношений

$$d\frac{mvs}{dt} = m\frac{dv}{dt}s + mv\frac{ds}{dt} \quad \text{и} \quad \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d(mvs)}{dt}dt = (mvs)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0,$$

последнее уравнение в случае, если s у обоих пределов исчезает, переходит в уравнение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(mgs + mv\frac{ds}{dt}\right) dt = 0,$$

т. е. принимает форму принципа Гамильтона.

Таким образом, как ни различными кажутся принципы механики, тем не менее в них нет выражения различных фактов, а в них до известной степени рассматриваются лишь различные *стороны* все одного и того же факта.

10. Некоторые применения принципов механики к решению задач гидростатических и гидродинамических

1. Данные нами до сих пор примеры применения принципов механики относились к системам твердых тел. Дополним их теперь еще некоторыми примерами применения их к решению задач гидростатических и гидродинамических. Рассмотрим сначала законы равновесия *свободной от действия тяжести* жидкости, находящейся только под действием, так называемых, молекулярных сил. Сил тяжести мы в нашем исследовании принимать во внимание не будем. Как показал Плато, можно жидкость поставить в такие условия, как будто вовсе нет сил тяжести. Происходит это, например, если налить оливковое масло в смесь воды и спирта, имеющую такой же удельный вес, как это масло. Согласно принципу Архимеда масло в такой смеси едва держится на поверхности и жидкость, действительно, находится в условиях, как будто на нее не действует сила тяжести.

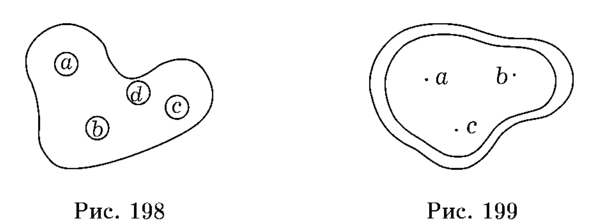


Рис. 198 Рис. 199

2. Представим себе сначала свободную от действия силы тяжести массу жидкости, находящуюся свободно в пространстве. О молекулярных силах мы прежде всего знаем, что они действуют на очень малое расстояние. Около каждой из точек a, b, c внутри массы жидкости мы можем расстоянием, на котором молекулярные силы не оказывают более никакого поддающегося измерению действия, как радиусом, описать шар, так называемую, сферу действия. Эти сферы действия, описанные около точек a, b, c, равномерно и правильно наполнены другими частицами. Результирующая сила, действующая на частицы a, b, c, равна поэтому нулю. Только те частицы, расстояние которых от поверхности меньше радиуса сферы действия, находятся в других условиях действия сил, чем частицы внутри. Если мы будем рассматривать все радиусы кривизны элементов поверхности нашей массы жидкости, как

очень большие сравнительно с радиусом сферы действия, то мы можем вырезать поверхностный слой толщиной в радиус сферы действия и в этом поверхностном слое частицы будут находиться в *других* физических условиях, чем внутри. Если мы переведем частичку a, находящуюся внутри сферы в точке a, в точку b или c, она будет оставаться в тех же физических условиях; то же самое можно сказать о частицах, которые займут место, оставленное частицей a. Здесь работа совершена быть не может. Напротив того, она бывает совершена, когда частица переводится из поверхностного слоя во внутрь или, наоборот, изнутри в поверхностный слой. Работа, следовательно, совершается только при *изменении* величины поверхности. При этом прежде всего вовсе не важно, остается ли плотность в поверхностном слое такой же, как внутри, или она остается постоянной во всей толще слоя. Ясно, что работа остается связанной с изменением поверхности и тогда, когда испытуемая масса жидкости погружена в другую жидкость, как это происходит при опыте Плато.

Возникает теперь вопрос, если перевести частицы внутрь и тем уменьшить поверхность, то бывает ли работа положительной или отрицательной, т. е. совершается ли при этом работа, или затрачивается. Так как две соприкасающиеся капли жидкости *сами* сливаются в одну, причем поверхность *уменьшается*, то отсюда следует, что при *уменьшении* поверхности *совершается работа* (работа положительна). Van der Mensbrughe демонстрировал положительное совершение работы при уменьшении поверхности жидкости при помощи другого, очень красивого эксперимента. Погружают проволочный квадрат в мыльный раствор и на образующуюся мыльную пленку кладут мокрую замкнутую нитку. Если встряхнуть жидкость, замкнутую ниткой, то окружающая ее мыльная пленка стягивается и нитка ограничивает круглое отверстие в пленке. Так как круг представляет наибольшую площадь при данной длине нитки, то отсюда следует, что остальная мыльная пленка сжалась до минимума.

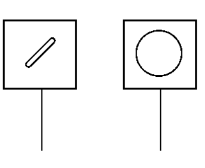


Рис. 200

Таким образом, мы без труда познаем следующее. Свободная от тяжести, подчиненная действию молекулярных сил жидкость находится *в равновесии* при той форме, при которой система возможных перемещений не вызывает *никакого* изменения в величине ее поверхности. Но *возможными* перемещениями могут быть признаны все бесконечно малые изменения формы, допустимые без изменения *объема* жидкос-

ти. Таким образом, равновесие существует для тех форм, для которых бесконечно малое перемещение вызывает изменение поверхности = 0. Для *минимума* поверхности при данном объеме жидкости мы получаем *устойчивое*, а для *максимума* поверхности — *неустойчивое* равновесие.

Шар представляет наименьшую поверхность при данном объеме. Поэтому для свободной массы жидкости шарообразная форма окажется формой устойчивого равновесия, для которой совершен максимум работы, так что не остается более совершить никакой работы. Если жидкость отчасти прилипает к твердым телам, то форма ее связана с другими побочными условиями, и тогда задача становится сложнее.

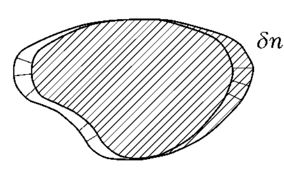


Рис. 201

3. Чтобы исследовать связь между *величиной* поверхности и ее *формой*, мы поступим следующим образом. Представим себе, что замкнутая поверхность жидкости бесконечно мало изменяется без изменения объема. Первоначальную поверхность мы рассекаем двумя пучками (перпендикулярных друг к другу) линий кривизны на прямоугольные бесконечно малые элементы. В углах этих элементов мы восстанавливаем перпендикуляры на первоначальную поверхность и таким образом определяем углы соответствующих элементов измененной поверхности. Элементу dO первоначальной поверхности соответствует тогда элемент dO' измененной поверхности. dO переходит в dO' при бесконечно малом перемещении δn по нормали наружу или внутрь и соответствующем изменении величины поверхности.

Пусть dp, dq суть стороны элемента dO. Для сторон dp', dq' элемента dO' мы имеем тогда соотношения

$$dp' = dp\left(1 + \frac{\delta n}{r}\right),$$

$$dq' = dq\left(1 + \frac{\delta n}{r'}\right),$$

где r и r' суть радиусы кривизны главных сечений, соприкасающихся с элементами кривых линий p, q, так называемые, главные радиусы кривизны. Мы считаем, как это принято, радиус кривизны выпуклого наружу элемента положительным и радиус кривизны вогнутого наружу

элемента — отрицательным. Мы получаем тогда для вариации элемента

$$\delta\, dO = dO' - dO = dp\, dq \left(1 + \frac{\delta n}{r}\right)\left(1 + \frac{\delta n}{r'}\right) - dp\, dq.$$

Если пренебречь высшими степенями от δn, мы получим

$$\delta\, dO = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n\, dO.$$

Вариация всей поверхности будет выражена следующим уравнением

$$\delta O = \int \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \delta n\, dO, \qquad (1)$$

и перемещения вдоль нормали должны быть выбраны так, чтобы

$$\int \delta n\, dO = 0, \qquad (2)$$

т. е. чтобы сумма объемов, образующихся перемещением наружу и внутрь элементов поверхности (в последнем случае считая эти перемещения отрицательными), была равна нулю, т. е. чтобы *объем* оставался постоянным.

Выражения (1) и (2) только тогда могут быть совместно равны нулю, когда выражение $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ сохраняет *одну и ту же* величину для всех точек поверхности. В этом нетрудно убедиться при помощи следующего рассуждения. Элементы dO первоначальной поверхности мы представляем себе символически при помощи элементов линии AX и на ней наносим в виде ординат на плоскость E перемещения вдоль нормали δn, причем перемещения наружу мы наносим вверх, как положительные, а перемещения внутрь наносим вниз, как отрицательные перемещения. Концы этих ординат мы соединяем кривой линией и образуем ее квадратуру, причем поверхности, лежащие выше AX, мы считаем положительными, а лежащие ниже ее — отрицательными. При всех системах δn, при которых квадратура = 0, выражение (2) равно нулю, и все такие системы перемещений — допустимы (возможны).

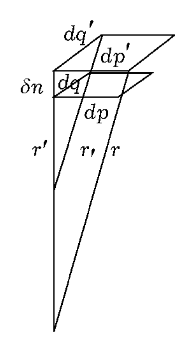


Рис. 202

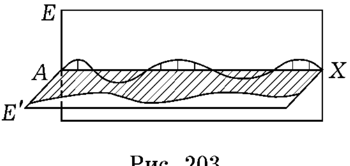


Рис. 203

Нанесем теперь в качестве ординат на плоскость E соответствующие элементам dO величины для $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$. Мы можем теперь легко себе представить случай, когда выражения (1) и (2) совместно получают значение нуля. Если же $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ имеет *различную* величину для различных элементов, то мы *всегда* можем, не изменяя значения нуля для выражения (2), так распределить элементы δn, чтобы выражение (1) было отлично от нуля. Только тогда, когда выражение $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ имеет *одну и ту же* величину для всех элементов, становится необходимым и всеобщим правилом, что вместе с выражением (2) становится равным нулю и выражение (1).

Таким образом, из обоих условий (1) и (2) следует, что $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\text{const}$, т. е. сумма обратных величин главных радиусов кривизны (или радиусов кривизны главных нормальных сечений) в случае равновесия остается постоянной по всей поверхности. Это правило выясняет зависимость *величины* поверхности от ее *формы*. Этот ход рассуждения был впервые предложен Гауссом, но в гораздо более подробной и пространной форме. Нет однако ничего трудного коротко представить сущность этого рассуждения, как мы это здесь сделали, на более простом примере.

4. Совершенно *свободная* масса жидкости принимает, как мы уже упоминали, форму шара и представляет абсолютный минимум поверхности. Условие $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\text{const}$ здесь, очевидно, выполнено в форме $\frac{2}{R}=\text{const}$, где R есть радиус шара. Если свободная поверхность жидкости ограничена двумя твердыми круглыми кольцами, площади которых друг другу параллельны и которые так расположены, что линия, соединяющая их центры, перпендикулярна к тем площадям, то поверхность ее принимает форму поверхности вращения. Характер меридиональной кривой, как и объем, замкнутый в этой поверхности вращения, определяются радиусом кольца R, расстоянием между площадями кругов и величиной суммы $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$. Эта поверхность вращения становится поверхностью цилиндра, когда

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{R}.$$

При $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 0$, причем, следовательно, одно нормальное сечение выпукло, а другое вогнутое, меридиональная кривая становится цепной линией. Плато и изобразил относящиеся сюда случаи, облив два проволочных кольца в смеси спирта и воды маслом.

Представим себе массу жидкости, ограниченную частями поверхности, для которых выражение $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ есть величина положительная, и другими частями поверхности, для которых это выражение есть величина отрицательная; короче говоря, представим себе массу жидкости, ограниченную выпуклыми и вогнутыми частями поверхности. Нетрудно заметить, что перемещение элементов поверхности вдоль нормали наружу вызовет на вогнутых частях уменьшение поверхности, а на выпуклых — увеличение ее. Таким образом, *совершается работа*, когда *вогнутые* части поверхности передвигаются наружу и когда *выпуклые* передвигаются *внутрь*. Работа совершается уже и тогда, когда движется наружу часть поверхности, для которой $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = +a$ и в то же время движется во внутрь равная ей часть поверхности, для которой $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} > a$.

Итак, покуда массу жидкости ограничивают части поверхности *различной кривизны*, выпуклые части должны двигаться внутрь, а вогнутые наружу до тех пор, пока условие $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \mathrm{const}$ не оказывается выполненным для всей поверхности. И тогда, когда цельная масса жидкости имеет *несколько* отдельных частей поверхности, ограниченных твердыми телами, величина выражения $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ в случае равновесия должна быть одной и той же для всех свободных частей поверхности.

Если, например, наполнить пространство между обоими упомянутыми выше кольцами (в смеси спирта с водой) маслом, то при соответствующем количестве масла можно получить поверхность цилиндра, скомбинированную с двумя шаровыми отрезками на обоих основаниях. Между радиусами кривизны боковой поверхности и оснований существует тогда отношение $\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho}$ или $\rho = 2R$, где ρ означает радиус шара, а R радиус кольца. Плато подтвердил этот вывод на опыте.

5. Рассмотрим не имеющую тяжести массу жидкости, включающую некоторое пустое пространство. Условие, чтобы $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ имело одну и ту же величину для внутренней и внешней поверхности жидкости, здесь *не* выполнимо. Напротив того, так как эта сумма имеет всегда

большую положительную величину для замкнутой наружной поверхности, чем для замкнутой внутренней поверхности, то жидкость будет перетекать, совершая работу, от внешней к внутренней поверхности и уничтожать пустое пространство. Но если это последнее наполнено чем-нибудь жидким или газообразным, которое находится под известным давлением, то совершенная при упомянутом процессе работа может быть *компенсирована* работой, потраченной на сжатие, и тогда наступает равновесие.

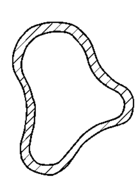


Рис. 204

Представим себе жидкость, замкнутую между двумя, очень близкими, подобными и подобно расположенными поверхностями. Такую жидкость представляет собой *пузырь*. Здесь может существовать равновесие только в случае перевеса давления замкнутого газа. Если для наружной поверхности сумма $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ здесь имеет величину $+a$, то для внутренней поверхности величина ее очень близка к $-a$. Совершенно свободный пузырь всегда принимает форму шара. Если мы представим себе подобного рода шарообразный пузырь и будем пренебрегать его толщиной, то при уменьшении радиуса r на dr уменьшение всей поверхности будет равно $16r\pi dr$. Если на уменьшение всей поверхности на единицу поверхности тратится работа A, то $A \cdot 16r\pi dr$ есть вся работа, которая в случае равновесия должна быть компенсирована работой, потраченной на сжатие содержимого в пузыре, если давление его p, т. е. работой, которая равна $p \cdot 4r^2\pi dr$. Отсюда следует $\frac{4A}{r} = p$, откуда можно вычислить A, если r измерен и p определено манометром, помещенным в пузырь.

Открытого шарообразного пузыря быть не может. Для того, чтобы открытый пузырь имел форму равновесия, сумма $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$ не только должна быть постоянна для каждой из обеих предельных поверхностей в отдельности, но она должна быть также равна для обеих. В случае противоположной кривизны обеих поверхностей сумма $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 0$. При этом условии, следовательно, мы имеем для всех точек $r = -r'$. Поверхность есть тогда, так называемая, поверхность *нулевой* кривизны, она есть минимальная поверхность и элементы ее, как это легко заметить, бывают всегда *седлообразны*. Чтобы получить такую поверхность, достаточно сделать из проволоки любую замкнутую кривую в пространстве и опустить ее в мыльный раствор: мыльная пленка сама тогда получает форму упомянутой поверхности.

6. Фигуры равновесия жидкостей, состоящих из тонких пленок, имеют особую характерную черту. Работа сил тяжести проявляется на *всей* массе жидкости, а работа молекулярных сил только на одном *поверхностном* слое. В общем перевешивает работа силы тяжести. Но при тонких пленках молекулярные силы оказываются в очень благоприятном отношении к силам тяжести, благодаря чему соответственные фигуры могут быть без особых приемов представлены в свободном воздухе. Подобного рода фигуры получил Плато, погрузив модель многогранника (из проволоки) в мыльный раствор. При этом образуются плоские пленки жидкости, связанные между собою и с краями проволоки. Если плоские пленки жидкости связаны так, что они сталкиваются, образуя внутреннее ребро, то для поверхности жидкости условие $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \mathrm{const}$ уже не выполнено, ибо эта сумма имеет для плоских поверхностей величину нуль, но для внутреннего ребра очень большую отрицательную величину. Согласно установленным до сих пор воззрениям, жидкость должна была бы вытекать из плоскостей, толщина которых должна становиться все меньше, и истекать у краев. Это движение и происходит в действительности. Но когда толщина пластинок убывает до известного предела, то наступает *состояние равновесия.* По каким *физическим* причинам это состояние наступает, до сих пор, по-видимому, еще не установлено.

Правда, в этих фигурах основное условие $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \mathrm{const}$ уже не выполнено, ибо очень тонкие пластинки жидкости (в особенности вязких жидкостей) представляют несколько другие физические условия, чем те, из которых мы исходили. При всем том и эти фигуры обнаруживают еще всегда *минимум* поверхности. Пластинки жидкости, остающиеся в связи с краями проволоки и между собою, сходятся всегда по три в одном ребре под почти равными углами в 120° и каждые четыре ребра в свою очередь сходятся, образуя почти равные углы. Можно доказать геометрически, что эти условия соответствуют минимуму поверхности. Таким образом, во всем многообразии описанных здесь явлений находит свое выражение всегда один только факт, именно тот, что молекулярные силы уменьшением поверхности совершают (положительную) работу.

7. Фигуры равновесия, которые получал Плато, погружая модели многогранников в мыльные растворы, образуют системы жидких пластинок, удивительно *симметричные.* Невольно возникает вопрос: что об-

щего вообще между ***равновесием***, с одной стороны, и ***симметрией*** и правильностью — с другой. Ответить на этот вопрос нетрудно. В каждой симметричной системе каждой нарушающей симметрию деформации соответствует столь же возможная, равная и противоположная симметрия. Обеим также соответствует работа положительная или отрицательная. Таким образом, одним, хотя и недостаточным еще, условием, чтобы форме равновесия соответствовал максимум или минимум работы, является симметрия. Правильность есть многократная симметрия. Нет поэтому ничего удивительного в том, что формы равновесия часто бывают симметричны и правильны.

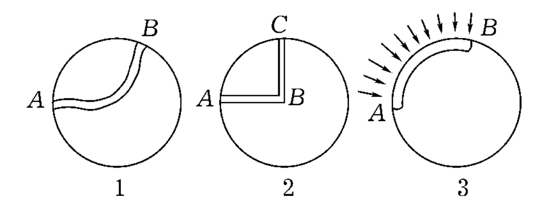


Рис. 205

8. Гидростатика математическая развилась на решении одной специальной задачи, касающейся *формы Земли*. Известно, что на основании некоторых физических и астрономических данных Ньютон и Гюйгенс пришли к тому взгляду, что Земля есть сплющенный эллипсоид вращения. Ньютон попытался вычислить это сплющение, представив себе вращающуюся Землю жидкой и приняв, что все нити жидкости, идущие от поверхности к центру, должны оказывать на этот последний одно и то же давление. Гюйгенс же исходил из того допущения, что направления действия силы перпендикулярны к элементам поверхности. Bouguer объединяет оба допущения в одно. Clairaut, наконец («Théorie de la Figure de la terre», Paris, 1743), показывает, что и выполнение ***обоих*** условий *не* достаточно для осуществления равновесия.

Clairaut исходит из следующих соображений. Если жидкая Земля находится в равновесии, то мы можем без нарушения этого равновесия представить себе любую часть ее отвердевшей так, чтобы остался один только наполненный жидкостью канал AB любой формы, в котором жидкость тоже находилась бы в равновесии. Равновесие в таком канале легче теперь исследовать. Если оно существует в ***любом мыслимом*** канале ***подобного рода***, то и вся масса находится в равновесии. Между

прочим Clairaut замечает, что получают основной принцип Ньютона, если проводят канал через центр (как на рис. 205, 2), и принцип Гюйгенса, если проводят его у поверхности (как на рис. 205, 3).

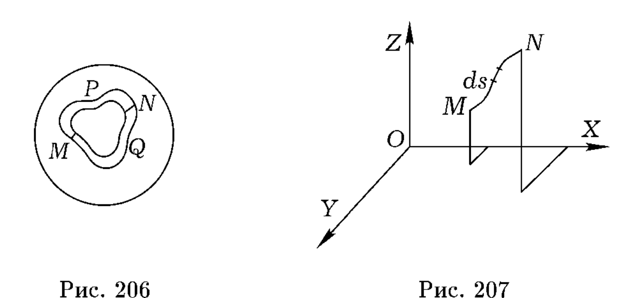


Рис. 206 Рис. 207

Но суть вопроса заключается, по мнению Clairaut, в другом замечании. Во всяком мыслимом канале, не исключая и *замкнутого в себе*, жидкость должна находиться в равновесии. Если поэтому сделать в любых местах M и N канала, изображенного на рис. 206, поперечные разрезы, то оба столба жидкости MPN и MQN должны оказывать равное давление на поперечные разрезы у M и N. Таким образом, давление столбов жидкости в канале в концах его вовсе не зависит от *длины* и *формы* этих столбов, а зависит только от *положения этих концов.*

Отнесем мысленно канал MN (рис. 207) произвольной формы в соответствующей жидкости к прямоугольной системе координат. Пусть это — жидкость *постоянной* плотности ρ и пусть составляющие силы X, Y, Z по направлениям координат, действующие на единицу массы жидкости, суть функции координат x, y, z этой массы. Обозначим элемент длины канала через ds, проекции которого на осях координат суть dx, dy, dz. Составляющие силы, действующие на единицу массы по направлению канала, суть тогда $X\frac{dx}{ds}$, $Y\frac{dy}{ds}$, $Z\frac{dz}{ds}$. Вся сила, заставляющая элемент массы $\rho q\,ds$ канала, где q есть поперечное сечение его, двигаться в направлении ds, есть

$$\rho q\,ds\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right).$$

Эта сила должна быть удержана в равновесии приращением давления при прохождении через элемент длины и должна быть поэтому равна $q\,dp$. Мы получаем, следовательно, $dp=\rho(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$. Чтобы

получить разность давления (p) между концами M и N, мы должны интегрировать это выражение в пределах от M до N. Но так как эта разность вовсе не зависит от формы канала, а только от положения концов M и N, то выражение $\rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ или при постоянной плотности также выражение $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ должно быть полным дифференциалом. Для того же, чтобы такое выражение было полным дифференциалом, необходимо, как известно, чтобы

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz},$$

где U есть функция координат. *Таким образом, по Clairaut равновесие жидкости бывает вообще возможно только тогда, когда на нее действуют силы, которые могут быть представлены, как частные производные одной и той же функции координат.*

9. Это качество присуще силам тяжести Ньютона и вообще всем *центральным силам*, т. е. таким силам, которые оказывают массы в направлениях соединяющих их линий и которые являются функциями расстояний этих масс друг от друга. Под действием таких сил может существовать равновесие жидкостей. Раз мы знаем функцию U, мы можем приведенное выше уравнение заменить уравнением

$$dp = \rho\left(\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz\right).$$

или $dp = \rho\,dU$ и $p = \rho U + \text{const}$.

Совокупность всех точек, для которых $U = \text{const}$, есть поверхность, так называемая, *поверхность уровня*. Для этой поверхности $p = \text{const}$. Так как природа функции U определяет все условия сил и, как мы только что видели, также все условия давления, то условия давления дают нам копию условий сил, как мы это заметили уже на стр. 78.

В изложенных здесь рассуждениях Clairaut скрывается уже, без сомнения, основная мысль учения *о силовой функции* или *о потенциале*, которое впоследствии с таким успехом было развито Лапласом, Пуассоном, Грином, Гауссом и другими. Раз обращено внимание на упомянутое свойство некоторых сил оказываться производными одной и той же функции U, то уже нетрудно познать все великое преимущество и *экономию* метода, исследующего вместо самих сил функцию U.

Рассматривая уравнение

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \rho\,dU,$$

мы видим, что $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ выражает элемент *работы*, которую совершают силы над единицей массы жидкости при перемещении ds (проекции которого суть dx, dy, dz). Таким образом, если мы переместим единицу массы с точки, для которой $U = C_1$ в какую-нибудь другую точку, для которой $U = C_2$, или, выражаясь более общим образом, с поверхности $U = C_1$ на поверхность $U = C_2$, то, каким бы путем мы ни совершили это перемещение, мы совершим *одну и ту же* работу. Вместе с тем все точки первой поверхности обнаруживают в отношении к точкам второй поверхности одну и ту же разность давления, так что

$$p_2 - p_1 = \rho(C_2 - C_1),$$

где величины, обозначенные одним и тем же показателем, относятся к одной и той же поверхности.

10. Представим себе группу таких очень близких друг к другу поверхностей, из которых каждая отличается от соседней на одну и ту же очень малую величину работы, т. е. поверхностей $U = C$, $U = C + dC$, $U = C + 2dC$ и т. д.

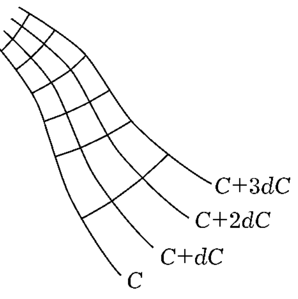


Рис. 208

Нетрудно заметить, что масса, перемещаемая *в одной и той же* поверхности, не совершает никакой работы. Составляющая сила, приходящаяся на элемент поверхности, поэтому $= 0$. Поэтому направление *всей силы*, действующей на массу, везде *перпендикулярно* к элементу поверхности. Если мы обозначим через dn элемент нормали, лежащий между двумя следующими друг за другом поверхностями, и через f силу, перемещающую единицу массы по этому элементу с одной поверхности на другую, то работа $f\,dn = dC$. Так как dC принимается постоянным, то сила $f = \dfrac{dC}{dn}$ везде обратно пропорциональна расстоянию между соответственными поверхностями. Поэтому раз известны поверхности U, то *направления сил* даны через элементы совокупности кривых, везде перпендикулярных к этим поверхностям, и расстояния между поверхностями наглядно представляют

нам *величины* сил. С этими поверхностями и кривыми мы встречаемся и в остальных областях физики. Это — уровни потенциала и силовые линии в области электростатики и магнетизма, изотермические поверхности и токовые линии в области теплопроводности, поверхности уровня и токовые кривые в течениях жидкостей и электрических.

11. Разъясним еще основную идею Clairaut одним очень простым примером. Представим себе две перпендикулярные друг к другу плоскости, пересекающие под прямым углом плоскость бумаги, образуя прямые OX и OY. Мы принимаем, что существует силовая функция $U = -xy$, где x, y суть расстояния от этих обеих плоскостей. В таком случае, составляющие силы, параллельные к OX и OY, соответственно будут

$$X = \frac{dU}{dx} = -y \quad \text{и} \quad Y = \frac{dU}{dy} = -x.$$

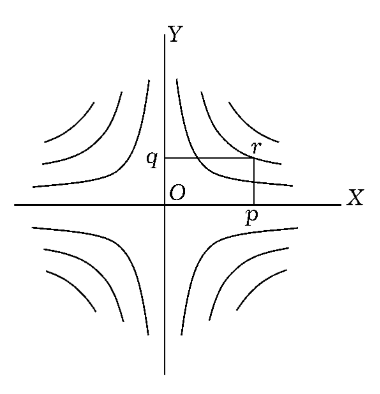


Рис. 209

Поверхности уровня суть цилиндрические поверхности, образующие которых перпендикулярны к плоскости бумаги, а направляющие, $xy = \text{const}$, суть равносторонние гиперболы. Силовые линии мы получим, если первую из упомянутых выше систем кривых повернуть в плоскости чертежа на 45° около точки O. Если единица массы перемещается из точки r в точку O по пути rpO или rqO, или по какому-либо другому пути, то совершенная работа есть всегда $Op \times Oq$. Если мы представим себе замкнутый и наполненный жидкостью канал $OprqO$, то жидкость в нем будет в равновесии. Если мы в любых двух местах этого канала сделаем поперечные разрезы, то каждый из этих двух поперечных разрезов будет с обеих сторон испытывать одно и то же давление.

Внесем теперь некоторые небольшие изменения в наш пример. Пусть силы наши будут $X = -y$, $Y = -a$, причем a есть величина постоянная. У нас нет теперь никакой функции U, для которой $X = \frac{dU}{dx}$ и $Y = \frac{dU}{dy}$, ибо для этого должно было бы быть $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}$, чего, очевид-

но, нет. Нет поэтому никакой силовой функции и нет также никаких поверхностей уровня. Если единица массы перемещается из r через p в O, то совершенная работа есть $a \times Oq$. Если же перемещение происходит по пути rqO, то работа есть $a \times Oq + Op \times Oq$. Если бы канал $OprqO$ был наполнен жидкостью, то эта последняя не могла бы быть в равновесии, а должна была бы непрерывно *вращаться* в направлении $OprqO$. Такие течения, замкнутые в себе и существующие бесконечно, представляются нам чем-то, совершенно чуждым нашему опыту. Этим, однако, обращено внимание на одно *важное свойство* сил природы, на то именно свойство, что совершенная ими *работа* может быть представлена, как функция координат. Там, где мы замечаем исключения из этого правила, мы склонны считать их мнимыми и стараемся выяснить их.

12. Рассмотрим теперь несколько случаев *движения жидкостей*. Основателем учения о таком движении был Торричелли. Из наблюдений над струей жидкости, вытекающей из отверстия в дне сосуда, он вывел следующее правило: если разделить время, в которое опорожняется сосуд, на n равных частей и количество жидкости, вытекающей в последнюю n-ю часть времени, принять за единицу, то в $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$-ю и т. д. часть времени вытекает соответственно в 3, 5, 7 и т. д. раз больше. Сходство между движением падающего тела и движением жидкости здесь ясно само собой. Тут легко напрашивается замечание, что получились бы самые странные, самые удивительные последствия, если бы жидкость могла вылиться над уровнем жидкости в сосуд с помощью скорости истечения ее, обращенной вверх. Торричелли замечает также, что жидкость и может подняться — *самое большее* — до этой высоты, и принимает, что она поднялась бы точно до этой высоты, если бы все сопротивления могли быть устранены. Таким образом, если не принимать во внимание сопротивлений, то скорость истечения жидкости из отверстия в дне сосуда v связана с высотой жидкости h в сосуде уравнением $v = \sqrt{2gh}$, т. е. скорость истечения есть *конечная* скорость, которая при *свободном падении* могла бы быть достигнута высотой давления h, ибо с этой скоростью жидкость как раз может опять подняться до уровня жидкости в сосуде[1].

Принцип Торричелли прекрасно согласуется со всеми остальными данными нашего опыта, но чувствуется еще потребность в более точ-

[1]Более древние исследователи выводят свои принципы в неполной форме пропорций и потому большей частью принимают скорость v только пропорциональной $\sqrt{gh}$ или $\sqrt{h}$.

ном понимании его. Вариньон попытался вывести этот принцип из отношения между силой и созданным этой последней *количеством движения*. Если мы через α обозначим площадь отверстия в дне сосуда, через h — высоту давления, через s — удельный вес, через g — ускорение свободно падающего тела, через v — скорость истечения жидкости и через τ — малую часть времени, то известное уравнение $pt = mv$ получает в данном случае следующую форму

$$\alpha hs\tau = \frac{\alpha v\tau s}{g}v \quad \text{или} \quad v^2 = gh.$$

Здесь αhs означает давление, действующее в течение времени τ на массу жидкости $\frac{\alpha v\tau s}{g}$. Если мы примем еще во внимание, что v есть конечная скорость, мы получим точнее

$$\alpha hs\tau = \frac{\alpha\frac{v}{2}\tau s}{g}v$$

и правильная формула будет

$$v^2 = 2gh.$$

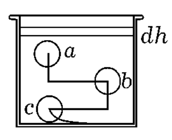


Рис. 210

13. Даниэль Бернулли исследовал движения жидкостей при помощи принципа *живых сил*. Рассмотрим наш случай теперь именно с этой точки зрения, но осуществим только эту мысль в несколько более современной форме. Мы должны воспользоваться уравнением $ps = \frac{mv^2}{2}$. В сосуде с поперечным разрезом q находится жидкость удельного веса s; высота давления $= h$ (рис. 210). Пусть уровень жидкости понижается на малую величину dh и при этом из сосуда вытекает со скоростью v масса жидкости $\frac{q\,dh\,s}{g}$. Совершенная работа здесь та же, как если бы груз $q\,dh\,s$ опустился на высоту h. Форма движения в самом сосуде здесь никакого значения не имеет. Безразлично, выпадет ли прямо из отверстия в дне сосуда слой $q\,dh$ или он перемещается в a в то время, как жидкость, здесь находящаяся, перемещается в b, жидкость из b перемещается в c, а жидкость из c вытекает. Работа всегда будет $q\,dh\,sh$. Приравняв эту работу живой силе вытекающей жидкости, мы получаем:

$$q\,dh\,sh = \frac{q\,dh\,s}{g}\frac{v^2}{2} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{2gh}.$$

При этом выводе делается только одно допущение, а именно, что *вся* совершенная в сосуде *работа* рассматривается, как живая сила вытекающей жидкости, т. е. что скорости в самом сосуде и поглощенная вследствие трения работа могут быть *не приняты во внимание.* В случае сосудов достаточно широких это допущение не очень далеко от истины.

Не будем принимать во внимание тяжести жидкости в сосуде и представим себе, что над ней находится подвижной поршень, на единицу поверхности которого давит груз p. Когда поршень перемещается на расстояние dh, из сосуда вытекает объем жидкости $q\,dh$. Обозначим через ρ плотность жидкости и через v ее скорость и мы имеем

$$qp\,dh = q\,dh\,\rho\frac{v^2}{2} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}.$$

Под одним и тем же давлением, следовательно, различные жидкости вытекают со скоростями, обратно пропорциональными корням их плотностей. Обыкновенно думают, что можно это правило непосредственно переносить на газы. Форма его правильна, но вывод, который часто употребляется, заключает в себе, как мы сейчас увидим, некоторую ошибку.

14. На рис. 211 изображены рядом два сосуда, соединенные между собой небольшим отверстием в разделяющей их стенке у самого дна. Для определения скорости истечения жидкости через это отверстие мы при тех же предпосылках, как и раньше, получаем

$$q\,dh\,s(h_1 - h_2) = q\frac{dh\,s}{g}\frac{v^2}{2} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Если не будем принимать во внимание тяжести жидкости и будем представлять себе, что в сосудах под действием поршней существует давление p_1 и p_2, мы получим $v = \sqrt{\dfrac{2(p_1 - p_2)}{\rho}}$. Если бы, например, те же поршни были нагружены грузами P и $\dfrac{P}{2}$, то груз P опустился бы на высоту h, а груз $\dfrac{P}{2}$ поднялся бы на ту же высоту, так что осталась бы совершенная работа $\dfrac{P}{2}h$, которая и создала бы живую силу протекающей жидкости.

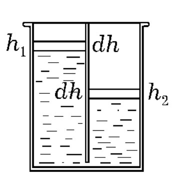


Рис. 211

Будь у нас газ, то при тех же условиях мы имели бы нечто другое. Если он из сосуда с давлением P переходит в сосуд с давлением $\frac{P}{2}$, то в первом сосуде груз опускается на высоту h, но во втором груз поднимается на $2h$ (так как, когда давление уменьшается в два раза, то объем газа возрастает вдвое). Здесь, следовательно, совершенная работа была бы $Ph - \frac{P}{2}2h = 0$. Таким образом, в случае газа должна быть совершена еще *другая* работа, обусловливающая перемещение его из одного сосуда в другой. Эту работу совершает сам газ, расширяясь и своей *силой упругости* преодолевая давление. Между этой силой p и объемом w газа существует известное отношение $pw = k$, где k есть величина постоянная (если температура газа не меняется). Если под давлением p объем газа расширяется на dw, совершенная работа есть

$$\int p\,dw = k\int \frac{dw}{w}.$$

Когда объем газа возрастает от w_0 до w или давление его возрастает от p_0 до p, то работа есть

$$k\log\left(\frac{w}{w_0}\right) = k\log\left(\frac{p_0}{p}\right).$$

Если мы представим себе теперь, что работа эта приводит в движение объем газа w_0 плотности ρ со скоростью v, мы получим

$$v = \sqrt{\frac{2p_0\log\left(\frac{p_0}{p}\right)}{\rho}}.$$

Таким образом, скорость истечения остается и здесь обратно пропорциональной квадратному корню из плотности жидкости, но величина ее не та, которую мы получили бы при прежнем методе. Мы не можем не заметить, что и это исследование весьма не свободно от недостатков. Быстрые изменения объема газа бывают всегда связаны с изменениями температуры, а следовательно, и с изменениями в силе упругости. Таким образом вопросы о движениях газов вообще не могут решаться, как вопросы чистой *механики*, так как они всегда вместе с тем вопросы, относящиеся к *теории теплоты.*

15. Мы только что видели, что сжатый газ содержит в себе работу. Отсюда сам собою напрашивается вопрос, не происходит ли то же

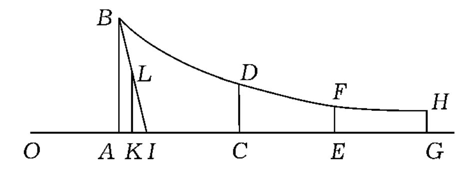


Рис. 212

самое в случае сжатой жидкости. Действительно, всякая жидкость, которая находится под каким-либо давлением, бывает сжата. Для сжатия необходима работа, которая снова освобождается, как только жидкость расширяется. Но в случае жидкостей капельножидких работа эта очень мала. Представим себе какой-нибудь газ и капельножидкую жидкость равного объема (измеряемого величиной OA) и под равным давлением (обозначенным через AB), например, под давлением одной атмосферы (рис. 212). Когда давление падает до половины атмосферы, то объем газа возрастает вдвое, но объем жидкости — только на 25 миллионных частей первоначального объема. Работу расширения газа изображает поверхность $ABDC$, а работу расширения жидкостей — поверхность $ABLK$, где $AK = 0{,}000025OA$. Когда давление уменьшается до нуля, то всю работу жидкости изображает поверхность ABI, где $AI = 0{,}00005OA$, а всю работу газа изображает поверхность, заключенная между AB, бесконечной прямой $ACEG\ldots$ и бесконечной ветвью гиперболы $BDFH\ldots$ Отсюда ясно, что работа расширения жидкостей *обыкновенно* может быть не принята во внимание. Но существуют процессы, как например, звуковые колебания жидкостей, в которых именно работы этого рода и порядка играют главную роль. В этом случае следует принимать во внимание и соответствующие изменения температуры жидкости. Таким образом, перед нами только счастливое стечение *обстоятельств*, когда какой-нибудь процесс может с достаточным приближением рассматриваться, как процесс *чисто механический.*

16. Рассмотрим теперь основную идею, которую старался провести в своей «Гидродинамике» Даниэль Бернулли (1738). Когда какая-нибудь масса жидкости опускается вниз, то *глубина падения* ее центра тяжести (descensus actualis) равна возможной *высоте поднятия* центра тяжести частей жидкости, обладающих достигнутыми скоростями и свободных друг от друга (ascensus potentialis). Нетрудно заметить тождество этой мысли с мыслью, из которой исходил уже Гюйгенс. Представим себе

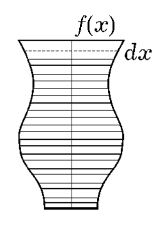


Рис. 213

сосуд, наполненный жидкостью, и обозначим горизонтальный поперечный разрез через него на расстоянии x от горизонтальной плоскости, определенной отверстием в дне сосуда, через $f(x)$. Пусть жидкость движется и уровень ее опускается на dx. Центр тяжести ее опускается при этом на $\frac{xf(x)\,dx}{M}$, где $M = \int f(x)\,dx$. Если k обозначает потенциальную высоту поднятия жидкости в поперечном разрезе, равном единице поверхности, то она будет $\frac{k}{(f(x))^2}$ в поперечном разрезе $f(x)$ и потенциальная высота поднятия центра тяжести есть

$$\frac{k\int\frac{dx}{f(x)}}{M} = k\frac{N}{M}, \quad \text{где} \quad N = \int\frac{dx}{f(x)}.$$

Для перемещения уровня жидкости на dx мы получаем, согласно изложенному принципу, так как при этом изменяются и N, и k,

$$-xf(x)\,dx = N\,dk + k\,dN.$$

Этим уравнением Бернулли пользовался для решения различных задач. Нетрудно заметить, что правилом Бернулли можно тогда только пользоваться с успехом, когда известны *отношения* скоростей отдельных частей жидкости друг к другу. Как это ясно уже из приведенных формул, Бернулли исходит из той мысли, что все части жидкости, когда-либо находившиеся в горизонтальной плоскости, остаются в горизонтальной плоскости всегда и что скорости в различных горизонтальных плоскостях обратно пропорциональны поперечным разрезам. Мысль эта есть допущение «*параллелизма слоев*». Допущение это во многих случаях совсем не соответствует фактам, в других случаях соответствует им только случайно. Когда сосуд очень широк сравнительно с отверстием, через которое жидкость истекает, то относительно движения в сосуде, как мы это видели уже при развитии принципа Торричелли, нет вовсе надобности делать какие-либо допущения.

17. Некоторые отдельные случаи движения жидкости были исследованы уже Ньютоном и Иоганном Бернулли. Рассмотрим здесь один случай, к которому может быть непосредственно применен один известный уже закон. Цилиндрическая сифонная трубка с верти-

кальными коленами наполнена жидкостью. Пусть длина всего столба жидкости есть l. Если в одном колене заставить столб жидкости опуститься ниже уровня на длину x, то он в другом колене поднимается на x и соответствующая перемещению x разность уровней составляет $2x$. Если α означает поперечный разрез трубки и s удельный вес жидкости, то перемещению x соответствует сила $2\alpha sx$. Так как эта сила должна привести в движение массу $\frac{\alpha ls}{g}$, то

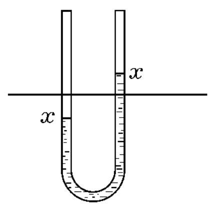


Рис. 214

она обусловливает ускорение $\dfrac{2\alpha sx}{\frac{\alpha ls}{g}} = \dfrac{2g}{l}x$, а для единицы перемещения — ускорение $\frac{2g}{l}$. Нетрудно заметить, что здесь будут происходить маятникообразные движения, продолжительность которых будет:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Таким образом, столб жидкости совершает такие колебания, как простой маятник, длина которого вдвое меньше его длины.

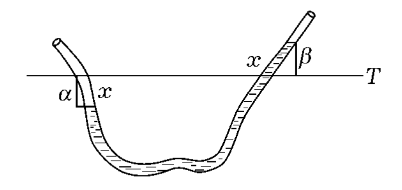


Рис. 215а

Подобную же, но несколько более общую задачу решал Иоганн Бернулли. Оба колена произвольно искривленной цилиндрической сифонной трубки наклонены в местах, до которых доходит уровень жидкости в них, под углами α и β к горизонту. Если в одном колене переместить уровень на расстояние x, то уровень в другой трубке перемещается на то же расстояние. Вследствие этого образуется разность уровней $x(\sin\alpha + \sin\beta)$ и, исходя из тех соображений, что и раньше, и пользуясь теми же обозначениями, мы получаем:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g(\sin\alpha + \sin\beta)}}.$$

К жидкому маятнику, изображенному на рис. 214, законы маятника применимы (если не принимать во внимание трения) *вполне точно* и при больших амплитудах колебания, между тем как в применении к нитяному маятнику они правильны лишь приблизительно и при небольших отклонениях.

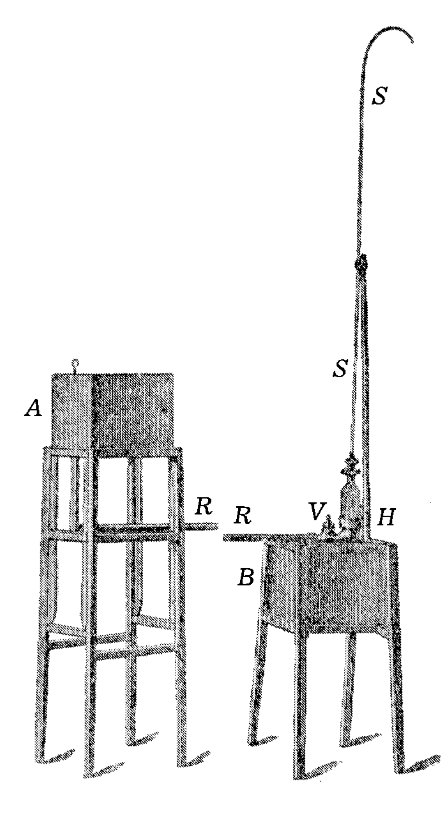


Рис. 215b

18. *Общий центр тяжести* жидкости может подняться лишь настолько высоко, насколько он должен опуститься для образования скоростей. Если где-либо кажется, будто это правило допускает исключение, то везде можно доказать, что это именно только так *кажется*. Геронов фонтан состоит, как известно, из трех сосудов. Обозначим их в порядке сверху вниз буквами A, B, C. Вода вытекает из A в C, вытесненный из C воздух давит на воду в B и гонит вверх струю воды, которая падает обратно в A. Вода из B поднимается, правда, значительно выше над уровнем воды в этом сосуде, но она стекает собственно лишь окольным путем фонтана через сосуд A на гораздо более низкий уровень в C.

Другое мнимое исключение из этого правила представляет *ударный сифон* Монгольфьера, в котором жидкость как будто собственной своей работой тяжести поднимается значительно выше первоначального своего уровня. Из сосуда A жидкость через длинную трубку RR и открывающийся внутрь вентиль V стекает в сосуд B. Если течение достаточно быстро, то вентиль V закрывается и мы имеем в трубке RR массу жидкости m, обладающую скоростью v и внезапно задерживаемую в своем течении; количество движения этой массы жидкости должно быть у нее взято. Если это происходит в течение времени t, то в течение этого времени жидкость может оказать давление $q = \frac{mv}{t}$, каковое давление и прибавляется к гидростатическому давлению p. Таким образом, жидкость может в течение этого времени проникать через вентиль в геронов шар H с давлением $p + q$, откуда она, благодаря этому, и может подняться по

трубке SS на бо́льшую высоту, чем та, которая соответствует одному давлению p. Здесь необходимо принимать во внимание, что всегда должна стечь значительная часть жидкости в B прежде, чем работа ее создаст в трубке RR скорость, необходимую для того, чтобы закрыть вентиль V. Выше первоначального уровня поднимается по трубке SS только незначительная часть жидкости, между тем как большая часть перетекает из A в B. Если собирать жидкость, вытекающую из трубки SS, то легко оказалось бы, что вследствие потерь центр тяжести этой и истекавшей в B жидкости лежит *ниже* уровня жидкости в A.

Принцип ударного сифона, передача работы большей массы жидкости небольшой ее части, которая, благодаря этому, получает большую скорость, легко иллюстрировать наглядно следующим весьма простым образом. Закрыв узкое отверстие воронки O, погружают последнюю широким отверстием вниз возможно глубже в большой сосуд с водой. Если затем быстро удалить закрывающий отверстие палец, воронка быстро наполняется водой, и уровень жидкости вне воронки, естественно, немного понижается. Совершенная работа соответствует падению содержимого воронки с центра тяжести поверхностного слоя S до центра тяжести S' содержимого воронки. При достаточной ширине сосуда все скорости в нем очень малы и почти вся созданная живая сила скрывается в содержимом воронки. Если бы все части этого содержимого имели равную скорость, они все могли бы подняться до первоначального уровня, или масса, как одно целое, могла бы подняться настолько высоко, что ее центр тяжести совпал бы с S. Но чем меньше поперечный разрез воронки, тем скорость в ней больше, вследствие чего в меньших поперечных разрезах скрывается значительно большая часть живой силы. Соответственные части жидкости скрываются поэтому от остальной массы и через горлышко воронки поднимаются высоко вверх над первоначальным уровнем, между тем как остальная часть остается значительно ниже его и общий центр тяжести даже не достигает первоначального уровня S.

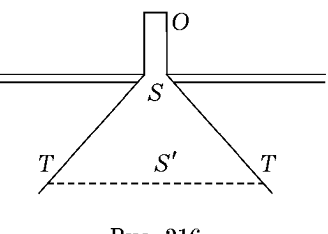


Рис. 216

19. Одной из важнейших заслуг Даниэля Бернулли есть установление им различия между *гидростатическим и гидродинамическим* давлением. При движении жидкостей давление их изменяется, и давление

движущейся жидкости может быть, смотря по условиям, больше или меньше, чем давление *покоящейся* жидкости при том же расположении частей. Объясним это отношение на простом примере. Пусть сосуд A, имеющий форму тела вращения с вертикальной осью, всегда наполнен лишенной трения жидкостью, так что уровень ее mn не изменяется, хотя жидкость и истекает у kl. Расстояние по вертикали частицы жидкости от уровня mn вниз мы считаем положительным и обозначаем его через z. Рассмотрим призматический элемент с горизонтальным основанием α и высотой β, движущийся вниз, и, предполагая параллелизм слоев, не будем принимать во внимание всех скоростей, перпендикулярных к z. Плотность жидкости обозначим через ρ, скорость элемента через v и давление, зависящее от z, через p. Если частичка опускается на dz, то принцип живых сил дает нам уравнение

$$\alpha\beta\rho\, d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \alpha\beta\rho g\, dz - \alpha\frac{dp}{dz}\beta\, dz. \qquad (3)$$

Это значит, что приращение живой силы элемента равно работе тяжести при соответственном перемещении без работы сил давления жидкости. Давление на верхнюю поверхность элемента есть αp, но давление на нижнюю поверхность есть $\alpha\left(p + \frac{dp}{dz}\beta\right)$. Таким образом, если давление книзу возрастает, то элемент испытывает давление $\alpha\frac{dp}{dz}\beta$ вверх и при перемещении на dz следует вычесть работу $\alpha\frac{dp}{dz}\beta\, dz$. Уравнение (3) в сокращенном виде имеет форму

$$\rho\, d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \rho g\, dz - \frac{dp}{dz}dz$$

и, если его интегрировать, оно получает форму

$$\rho\frac{v^2}{2} = \rho g z - p + \text{const}. \qquad (4)$$

Если мы обозначим скорости в двух различных горизонтальных поперечных разрезах через a_1 и a_2 и на глубинах z_1 и z_2 ниже уровня соответственно через v_1 и v_2, а соответствующие им давления через p_1 и p_2, то мы можем уравнение (4) написать в следующей форме

$$\frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \rho g(z_1 - z_2) + (p_2 - p_1). \qquad (5)$$

Если мы поднимем поперечный разрез a_1 до уровня жидкости, мы будем иметь $z_1 = 0$, $p_1 = 0$. Так как через все поперечные разрезы протекает в одно время одно и то же количество жидкости, то мы имеем $a_1 v_1 = a_2 v_2$. Отсюда следует

$$p_2 = \rho g z_2 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2} \right).$$

Давление *движущейся* жидкости p_2 (гидродинамическое давление) слагается из давления *покоящейся* жидкости $\rho g z^2$ (гидростатического давления) и давления $\frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{a_2^2} \right)$, зависящего от плотности, скорости течения и размеров поперечных сечений. В поперечных разрезах, *больших*, чем уровень жидкости, гидродинамическое давление *больше* гидростатического и наоборот.

Чтобы еще яснее сделать смысл принципа Бернулли, представим себе жидкость в сосуде A лишенной тяжести и истекающей под действием постоянного давления p_1 на ее уровень. Уравнение (5) получает тогда следующую форму

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

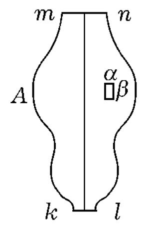


Рис. 217

Проследим движение одной частицы от уровня жидкости через сосуд. Каждому приращению скорости течения (в более узких поперечных разрезах) соответствует уменьшение давления, а каждому уменьшению скорости течения (в более широких поперечных разрезах) — приращение давления. Это нетрудно обозреть и без всяких вычислений. В данном случае каждое *изменение* скорости одного элемента жидкости должно быть создано исключительно *работой сил давления* жидкости. Если элемент переходит в меньший поперечный разрез с большей скоростью течения, то эта большая скорость может быть достигнута им только тогда, когда на нижнюю поверхность элемента действует большее давление, чем на переднюю, т. е. когда элемент движется от точек большего давления к точкам меньшего давления, когда давление убывает в направлении движения. Если мы представим себе на один момент давление в более широком и следующем за ним более узком поперечном разрезе равным, то в более узком ускорения элементов не будет. Элементы будут передвигаться недостаточно быстро, соберутся перед более узким поперечным разрезом и здесь сейчас же получится соответственное усиление давления. Обратное очевидно само собою.

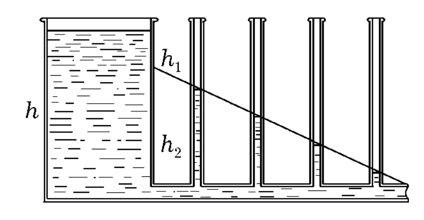


Рис. 218

20. В случаях более сложных решение вопросов о движении жидкости, не считаясь с трением, представляет уже большие затруднения. Затруднения эти становятся еще больше, когда приходится принимать еще в расчет влияние *трения*. И действительно, хотя эти исследования были начаты еще Ньютоном, однако до сих пор удалось справиться лишь с некоторыми, немногими и более простыми случаями этого рода. Удовольствуемся здесь одним простым примером. Когда из сосуда с высотой давления h вытекает жидкость не через отверстие в дне его, а через длинную цилиндрическую трубку, то скорость истечения v меньше, чем она должна была бы быть согласно принципу Торричелли, так как часть работы поглощается трением. Мы находим, что $v = \sqrt{2gh_1}$, причем $h_1 < h$. Мы можем принять $h = h_1 + h_2$ и назвать h_1 высотой *скорости*, а h_2 — высотой *сопротивления*. Если мы цилиндрическую трубку соединим с вертикальными боковыми трубочками, то жидкость в них поднимется настолько, что она уравновесит давление в главной трубке и будет нам показывать это давление. Замечательно тогда то, что в том конце трубки, в котором жидкость втекает, высота ее равна h_2 и что она в конце цилиндрической трубки убывает до нуля по закону прямой линии. Все эти соотношения должны быть выяснены.

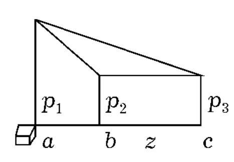


Рис. 219

На жидкость в горизонтальной цилиндрической трубке сила тяжести не действует *прямо*, а все действия переносятся на эту жидкость только через *давление* окружающей жидкости. Представим себе, что призматический элемент жидкости с основанием α и длиной β перемещается в направлении длины цилиндрической трубки на расстояние dz. Как и в рассмотренном раньше случае, совершенная работа здесь будет

$$-\alpha\frac{dp}{dz}\beta\,dz = -\alpha\beta\frac{dp}{dz}dz.$$

Для конечного перемещения мы получаем

$$-\alpha\int\limits_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{dz}dz = -\alpha\beta(p_2 - p_1). \qquad (6)$$

Совершается работа, когда элемент объема перемещается с места *более высокого* в место *более низкого* давления. Величина работы зависит только от величины элемента объема и *разности* давления в начале и в конце движения, но не зависит от длины и формы пути. Если бы уменьшение давления было в одном случае вдвое быстрее, чем в другом, то разность давлений на переднюю и заднюю поверхность, т. е. работающая *сила*, удвоилась бы, но *путь* работы уменьшился бы вдвое; работа же оставалась бы той же самой (на расстоянии ab или ac на рис. 219).

Через каждый поперечный разрез q горизонтальной цилиндрической трубки жидкость протекает с одной и той же скоростью v. Рассмотрим элемент жидкости, *наполняющий* поперечный разрез трубки q и имеющий длину β, и не будем принимать во внимание разности скоростей в *одном и том же* поперечнике. Его живая сила будет $q\beta\rho\frac{v^2}{2}$ и она остается без изменения на всем пути его движения по трубке. Это возможно только в том случае, когда *поглощенная трением* живая сила замещается *работой* сил *давления* жидкости. Таким образом, в направлении движения элемента давление должно убывать и притом убывать на равные части для равных расстояний, которым соответствует равная работа трения. Вся работа тяжести, совершенная для выливающегося элемента жидкости $q\beta\rho$, есть $q\beta\rho gh$. Отсюда приходится на живую силу элемента, вступающего в трубку со скоростью v, часть $q\beta\rho\frac{v^2}{2}$ или, так как $v = \sqrt{2gh_1}$, часть $q\beta\rho gh_1$. Остальная часть работы $q\beta\rho gh_2$ истрачивается, следовательно, в *трубке*, если вследствие медленного движения не принимаются во внимание потери в сосуде.

Если высоты давления в сосуде, в начале и конце трубки соответственно равны h, h_2, 0 или давления $p = hg\rho$, $p_2 = h_2g\rho$, 0, то, согласно уравнению (1) на странице 308, *работа* для образования живой силы *вступающего* в отверстие трубки элемента есть

$$q\beta\rho\frac{v^2}{2} = q\beta(p - p_2) = q\beta g\rho(h - h_2) = q\beta g\rho h_1,$$

а работа, которая давлением жидкости переносится на элемент, пробегающий длину трубки, есть

$$q\beta p_2 = q\beta g\rho h_2,$$

т. е. это именно та работа, которая истрачивается в трубке.

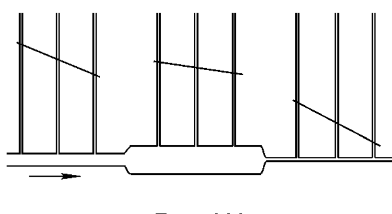


Рис. 220

Примем на один момент, что давление не убывает от начала до конца трубки от p_2 до 0 по закону прямой линии, а распределение давления другое; допустим, например, что давление остается постоянным вдоль всей длины трубки. Тотчас же частицы, находящиеся впереди, потеряли бы в скорости вследствие трения, последующие скучились бы и тем в начале трубки вызвали бы то усиление давления, которое обусловливает постоянную скорость вдоль всей длины трубки. В конце трубки давление может быть только равно нулю, ибо здесь жидкость не встречает помехи для того, чтобы сейчас же уклониться от всякого другого давления.

Представим себе жидкость образно в виде агрегата гладких упругих шаров. Шары эти будут наиболее сжаты на дне сосуда, в этом состоянии сжатия они поступят в трубку и будут терять его лишь постепенно по мере движения по ней. Дальнейшее развитие этого образа может быть предоставлено самому читателю.

На основании приведенного уже раньше замечания понятно, что работа, заключающаяся в сжатии самой жидкости, очень мала. Источником движения жидкости является работа тяжести в сосуде, которая через посредство давления сжатой жидкости переносится на части в трубке.

Представим себе, что жидкость вытекает через трубку, состоящую из многих цилиндрических частей различного поперечного разреза, и мы получим другое интересное видоизменение изложенного здесь случая. В *более узких* трубках, в которых на трение истрачивается больше работы, давление тогда быстрее убывает в направлении истечения жидкости, чем в более широких (рис. 220). Кроме того, замечается при каждом переходе в более широкую трубку и, следовательно, к *меньшей* скорости течения *приращение* давления (как бы положительную запруду), а при каждом переходе в более узкую трубку и, следовательно, к *большей* скорости течения внезапное *убывание* давления (как бы отрицательную запруду). Скорость течения элемента жидкости, на которую не действуют никакие прямые силы, может уменьшиться или увеличиться именно только тогда, когда он переходит к точкам более высокого или более низкого давления.

Глава IV

Формальное развитие механики

1. Проблема изопериметра

1. Раз для какой-нибудь области естествознания наблюдением установлены все важные факты, для этой науки начинается новый период, период *дедуктивный*, который мы и разбирали в предыдущей главе. Тогда удается воспроизводить факты в мыслях, не нуждаясь постоянно в помощи наблюдения. Мы воспроизводим более общие и более сложные факты, представляя их себе сложенными из элементов более простых, данных наблюдением и хорошо знакомых. Но и тогда, когда из выражений для наиболее элементарных фактов (принципов) мы вывели выражения для чаще встречающихся более сложных фактов (правила) и везде усмотрели одни и те же элементы, процесс развития этой области естествознания еще не завершен. За стадией дедуктивного развития следует стадия развития *формального*. Тогда возникает задача установить между происходящими и подлежащими воспроизведению фактами порядок, легко поддающийся обзору, привести их все в *систему* так, чтобы каждый отдельный факт мог быть найден и воспроизведен с *наименьшей затратой сил*. Стараются внести наибольшее *однообразие* в эти указания для воспроизведения фактов, так что они легко поддаются усвоению. Замечают, что периоды наблюдения, дедукции и формального развития не отграничены резко друг от друга, а что эти различные процессы часто происходят рядом, хотя в общем и целом означенная последовательность несомненна.

2. На формальное развитие механики оказали значительное влияние некоторые *математические* вопросы особого рода, весьма интересовавшие исследователей конца XVII и начала XVIII столетий. Вот на эти вопросы, так называемые, *проблемы изопериметра*, мы и бросим здесь некоторый взгляд. Задачи касательно наибольших и наименьших значений известных величин, касательно максимума и минимума занимали уже математиков Древней Греции. Уже Пифагор, утверждают, учил тому, что среди всех плоских фигур круг при данной окружности

имеет наибольшую поверхность. Не была также чужда древним мысль об известной экономии в процессах природы. Герон вывел закон отражения света из того допущения, что свет, исходящий из точки A, отразившись в M (рис. 221), кратчайшим путем достигает точки B.

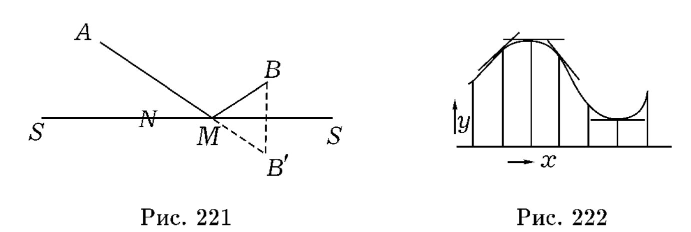


Рис. 221 Рис. 222

Если плоскость чертежа есть плоскость отражения, SS — поперечный разрез этой плоскости, A — исходная точка, B — конечная точка и M — точка отражения светового луча, то сейчас же можно заметить, что линия AMB', где B' есть изображение точки B, есть прямая линия. Линия AMB' короче, чем, например, линия ANB', а следовательно, и линия AMB короче линии ANB. Подобные же мысли развивает Pappus относительно органической природы, объясняя, например, форму пчелиных ячеек стремлением возможно более сэкономить на материале. В период возрождения наук эти мысли нашли плодородную почву. Сначала они были подхвачены Ферма и Робервалем, которые и развили метод для решения подобного рода задач. Исследователи эти заметили то, что не укрылось уже и от Кеплера, а именно, что величина y, зависящая от другой величины x, близ наибольшего и наименьшего своего значения в общем обнаруживает своеобразные свойства. Пусть x есть абсцисса и y — ордината; когда с нарастанием величины x величина y достигает наибольшей своей величины, то в этом месте повышение переходит в понижение; когда же она достигает наименьшей своей величины, то, наоборот, понижение переходит в повышение. Соседние значения максимума или минимума будут лежать поэтому очень *близко* друг к другу и соответственные касательные к кривой станут *параллельны* оси абсцисс. Поэтому чтобы найти эти максимальные или минимальные значения, разыскиваются эти параллельные касательные.

Этот метод *касательных* может быть непосредственно перенесен и в вычисление. Если мы, например, хотим от данной линии a отрезать такую часть x, чтобы произведение обоих отрезков x и $a - x$ было

возможно больше, мы рассматриваем это произведение $x(a-x)$ как величину y, зависящую от величины x. При максимальном значении величины y бесконечно малое изменение величины x, примерно на ξ, не повлечет за собой ни малейшего изменения величины y. Мы получим, следовательно, соответственное значение для x, если примем

$$x(a-x) = (x+\xi)(a-x-\xi) \quad \text{или}$$
$$ax - x^2 = ax + a\xi - x^2 - x\xi - x\xi - \xi^2 \quad \text{или}$$
$$0 = a - 2x - \xi.$$

Так как величина ξ может быть произвольно мала, то и

$$0 = a - 2x.$$

Отсюда имеем $x = \frac{a}{2}$, т. е. мы определили x. Мы видим, следовательно, что этим способом точка зрения метода касательных переносится в область вычислений и что в нем же содержится уже зародыш *дифференциального* исчисления.

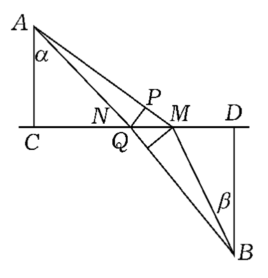


Рис. 223

Ферма попытался найти для закона преломления света выражение, аналогичное закону отражения света Герона. По этому случаю ему удалось заметить, что свет, исходящий из точки A, преломившись в точке M, достигает точки B не кратчайшим путем, а в кратчайшее время. Если путь AMB проходится в кратчайшее время, то на бесконечно близкий к нему соседний путь ANB употребляется *то же* время. Если мы опустим из точки N на линию AM и из точки M на линию NB соответственно перпендикуляры NP и MQ, то до преломления путь $MP = NM\sin\alpha$, а после преломления путь NQ возрастает и становится равным $NM\sin\beta$. Если поэтому скорости в первой и второй среде будут соответственно v_1 и v_2, то время для AMB станет минимумом, когда

$$\frac{NM\sin\alpha}{v_1} - \frac{NM\sin\beta}{v_2} = 0$$

или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n,$$

где n есть показатель преломления. Таким образом, закон отражения Герона оказывается, как замечает Лейбниц, частным случаем закона преломления. В случае равных скоростей ($v_1 = v_2$) условие минимума *времени* становится тождественным с условием минимума *пути*.

В своих исследованиях по оптике Гюйгенс сохранил и развил далее идеи Ферма, рассматривая не только прямолинейные, но и криволинейные движения света в средах с постоянно изменяющейся от места к месту скоростью света, и признал закон Ферма правильным и для этих сред. Таким образом, казалось, что во всех движениях света проявляется при всем многообразии в качестве основной черты стремление к *минимальной затрате времени*.

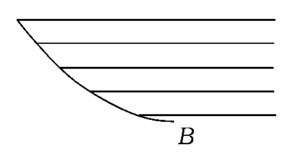


Рис. 223а

3. Подобные же свойства максимума или минимума были обнаружены и при наблюдении механических процессов природы. Как было упомянуто уже по другому поводу, Иоганну Бернулли было известно, что свободно подвешенная цепь принимает ту форму, при которой центр тяжести цепи оказывается *возможно ниже*. Это познание, естественно, было весьма близко исследователю, впервые познавшему *общее* значение принципа возможных перемещений. Побуждаемые этими замечаниями, ученые исследователи стали вообще подробнее заниматься изучением свойств максимума и минимума. Наиболее могучий толчок означенное научное движение получило от выставленной Иоганном Бернулли задачи о брахистохроне. В вертикальной плоскости лежат две точки A, B. Должна быть найдена та кривая в этой плоскости, на которой тело, вынужденное на ней оставаться, в *кратчайшее время* переходит из A в B. Задача эта была весьма остроумным образом решена самим Иоганном Бернулли, но кроме того еще Лейбницем, L'Hôpital'ем, Ньютоном и Якобом Бернулли.

Самое поразительное решение дано самим Иоганном Бернулли. Он замечает, что задачи подобного рода были уже решены, правда, не для движения падающего тела, а для движения света. Он представляет себе поэтому *движение падающего тела* целесообразным образом *замещенным* через *движение света* (см. стр. 326 и след.). Обе точки A и B должны находиться в среде, в которой скорость света возрастает вертикально вниз по тому же закону, как скорость падающего тела. Среда состоит, например, из горизонтальных слоев с убывающей книзу плотностью, так что $v = \sqrt{2gh}$ означает скорость света в слое, который

лежит на глубине h ниже A. Луч света, проходящий при таком расположении из точки A в точку B, описывает этот путь в кратчайшее время и вместе с тем дает кривую *кратчайшего времени падения.*

Если мы обозначим угол, образуемый элементом кривой с вертикалью и, следовательно, с нормалью к слою для различных слоев через α, α', α'', ... и соответствующие скорости через v, v', v'', ... , мы получим

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \frac{\sin\alpha'}{v'} = \frac{\sin\alpha''}{v''} = \cdots = k = \text{const}.$$

Если же мы обозначим вертикальное расстояние ниже A через x, горизонтальное расстояние от A через y и дугу кривой через s, мы получим

$$\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)}{v} = k.$$

Отсюда следует

$$dy^2 = k^2v^2\,ds^2 = k^2v^2(dx^2 + dy^2),$$

а так как $v = \sqrt{2gx}$, то

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}, \quad \text{где} \quad a = \frac{1}{2gk^2}.$$

Это — дифференциальное уравнение циклоиды, которую описывает точка периферии круга с радиусом $r = \frac{a}{2} = \frac{1}{4gk^2}$ качением по прямой.

Чтобы найти циклоиду, проходящую через точки A и B, мы вспомним, что *все* циклоиды, так как конструкция их сходная, *подобны* и что, если они образуются качением точки A по прямой AD, то они и *расположены подобно* относительно точки A. Мы проводим поэтому через AB прямую и конструируем какую-нибудь циклоиду, пересекающую эту прямую в B'. Пусть радиус образующего круга есть r'; тогда радиус образующего круга искомой циклоиды будет $r = r'\frac{AB}{AB'}$.

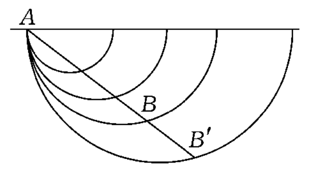
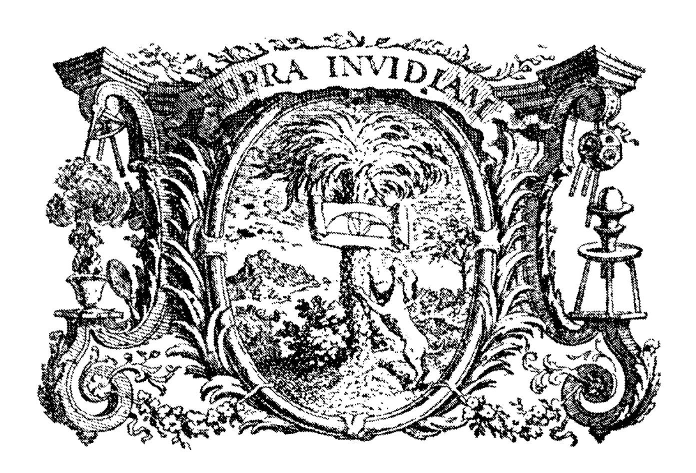


Рис. 224

Без всякого еще метода, при помощи одной своей геометрической *фантазии* Иоганн Бернулли одним взглядом решает задачу, умело пользуясь при этом тем, что случайно уже известно — картина воистину

замечательная и удивительно красивая. Мы должны признать в Иоганне Бернулли истинную художественную натуру, действующую в области естествознания. Брат его, Якоб Бернулли, был научным характером совсем другого рода. Ему было уделено гораздо больше критики, но гораздо меньше творческой фантазии. И он решил ту же задачу, но гораздо более тяжеловесным образом. Зато он не упустил случая развить с большей основательностью общий метод для решения задач этого рода. Таким образом, мы находим в обоих братьях разделенными те две стороны научного таланта, которые в величайших исследователях природы, каким был, например, Ньютон, бывают соединены с необычайной силой. Мы скоро увидим, как эти две способности, будучи связаны с двумя различными лицами, вступают друг с другом в ожесточенную открытую борьбу, которая при других условиях могла бы быть незаметно изжита в одной и той же личности.



Виньетка к книге Лейбница и Иоганна Бернулли «Comercium epistolicum Lausannae et Genevae, Bousquet, 1745»

4. Якоб Бернулли находит, что до сих пор занимались главным образом исследованием того, при каких *значениях* переменной величины другая переменная величина, зависящая от нее (или функция ее), получает наибольшее или наименьшее значение. Но здесь нужно *среди бесчисленного множества кривых* найти одну такую, которая обнаруживает известные свойства максимума или минимума. Это — задача

совершенно особого, нового рода, правильно замечает Якоб Бернулли, и требует нового метода.

Основные принципы, из которых исходит Якоб Бернулли при решении этой задачи (Acta eruditorum, 1697), таковы:

1. Если какая-нибудь кривая обнаруживает свойство максимума или минимума, то всякая часть этой кривой, как бы мала она ни была, обнаруживает то же свойство.

2. Подобно тому, как соседние с максимумом или минимумом значения какой-нибудь величины при бесконечных малых изменениях независимой переменной *становятся равными* максимальному или минимальному значению, так та величина, которая для искомой кривой должна стать максимумом или минимумом, сохраняет *то же самое* значение для бесконечно близких соседних кривых.

3. Кроме того для особого случая брахистохроны принимается еще, что достигнутая скорость падения $v = \sqrt{2gh}$, где h есть глубина падения.

Представим себе, что нам дана очень малая часть ABC искомой кривой. Проведем через точку B горизонтальную линию и пусть данная нам часть кривой перейдет в ADC. Совершенно аналогичными рассуждениями, как те, которыми мы пользовались при обсуждении закона Ферма, мы получаем известное уже отношение между синусами углов, образуемых элементами кривой с вертикалью, с одной стороны, и скоростями падения — с другой. При этом нужно, согласно правилу 1, принять, что и *часть* ABC брахистохрона, а согласно правилу 2, что ADC проходится падающим телом в течение того же времени, что и ABC. Вычисления Бернулли чересчур обстоятельны, но сущность их очевидна и при помощи намеченных принципов задача решается.

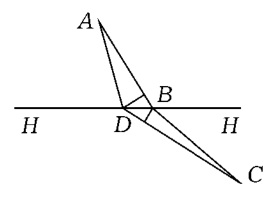


Рис. 225

С решением задачи брахистохроны Якоб Бернулли, согласно обычаю у математиков того времени, предложил следующую более общую *«задачу изопериметра»*:

«Среди всех, проведенных между одними и теми же двумя неподвижными точками, изопериметрических кривых (т. е. кривых равного периметра или равной длины) нужно найти ту кривую, которая обладает следующим свойством: площадь, заключающаяся между некоторой другой кривой, каждая ордината которой есть известная определенная

функция соответствующей той же абсциссе ординаты или соответствующей дуги искомой кривой, а также между ординатами ее конечных точек и частью абсциссы, лежащей между этими двумя ординатами, есть максимум или минимум».

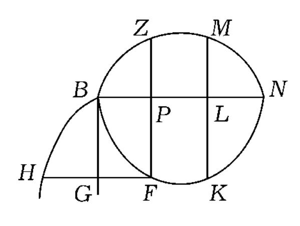


Рис. 226

Пусть, например, нам нужно кривую BFN, проходящую через точки B и N, определить так, чтобы среди всех кривых равной длины, проходящих через эти две точки, она одна делала поверхность BZN максимумом, причем ордината $PZ = (PF)^n$, $LM = (LK)^n$ и т. д.

Пусть отношение между ординатами кривой BZN и соответствующими ординатами BFN дано в кривой BH. Чтобы вывести PZ из PF, мы опускаем перпендикуляр FGH на BG, причем линия BG в свою очередь перпендикулярна к BN. При этом должно быть $PZ = GH$ и то же самое должно быть и для остальных ординат. Пусть $BP = y$, $PF = x$, $PZ = x^n$. Иоганн Бернулли сейчас же дал решение задачи в форме

$$y = \int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}},$$

где a есть произвольная и постоянная величина. При $n = 1$ имеем

$$y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a - \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Таким образом, BFN есть полукруг с диаметром BN и поверхность BZN тогда равна также поверхности BFN. В этом специальном случае решение и правильно, чего однако же нельзя сказать об общей формуле.

Вслед за этим Якоб Бернулли сделал попытку, во-первых, проследить ход идей своего брата, во-вторых, доказать его противоречия и ошибки и, в-третьих, дать истинное решение задачи. Тут-то прорвались взаимное соревнование и раздражение обоих братьев, приведя к некрасивой, но яростной и ожесточенной борьбе, продолжавшейся до самой смерти Якоба. После смерти брата Иоганн признал свою ошибку и принял правильный метод Якоба.

Якоб Бернулли правильно разобрал, что Иоганн, введенный, вероятно, в заблуждение результатами своих исследований цепной линии

и кривой паруса, снова попытался дать *непрямое* решение, представив себе BFN наполненной жидкостью переменного удельного веса и определив кривую BFN для самого низкого положения центра тяжести. Если примем, что ордината $PZ = p$, то в ординате $PF = x$ удельный вес *жидкости* должен быть $\frac{p}{x}$ и аналогичное должно быть в каждой другой ординате. Вес вертикальной нити есть тогда $\frac{p\,dy}{x}$ и момент ее относительно BN есть

$$\frac{1}{2}x\frac{p\,dy}{x} = \frac{1}{2}p\,dy.$$

Таким образом, для самого низкого положения центра тяжести $\frac{1}{2}\int p\,dy$ или $\int p\,dy = BZN$ будет максимумом. Но при этом, как вполне правильно замечает Якоб Бернулли, упускается из виду, что с изменением *кривой* BFN изменяется и *вес* жидкости, и рассуждение в этой простой форме уже неправильно.

Якоб Бернулли сам решает задачу следующим образом. Он опять принимает, что требуемым свойством обладает еще также малая часть кривой FF''' (рис. 227) и из четырех следующих друг за другом точек F, F', F'', F''' он обе крайние F, F''' считает неподвижными, а обе средние F', F'' изменяет так, что длина дуги $FF'F''F'''$ остается *без изменения*, что, естественно, возможно только при перемещении *двух* точек. Сложных и трудных его вычислений мы здесь приводить не будем. Принцип их достаточно ясно характеризуется и сказанным. Согласно Якобу Бернулли мы при сохранении прежних обозначений имеем, что

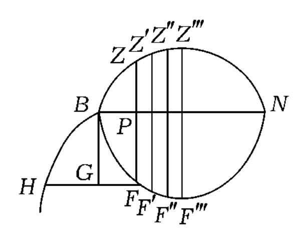


Рис. 227

$$\text{для} \quad dy = \frac{p\,dx}{\sqrt{a^2 - p^2}}$$

$$\int p\,dy \quad \text{есть максимум и}$$

$$\text{для} \quad dy = \frac{(a-p)\,dx}{\sqrt{2ap - p^2}}$$

$$\int p\,dy \quad \text{есть минимум.}$$

Конечно, эти раздоры между обоими братьями представляли явление печальное. Но гений одного и основательность другого все же принесли прекраснейшие плоды потому, что задачи, которые они решали, были весьма поучительны для Эйлера и Лагранжа.

5. Эйлер («Problematis isoperimetrici solutio generalis», Com. Akad. Petr. T. VI, 1738) первый дал более общий метод для решения разбираемых здесь задач максимума и минимума, или проблем равных периметров, хотя, правда, все еще опирался на слишком подробные геометрические рассуждения. Ясно усматривая и обозревая все различие относящихся сюда проблем, он делит их на следующие классы.

1. Среди *всех* кривых должна быть определена та, для которой свойство A есть максимум или минимум.

2. Из всех кривых, имеющих одну и ту же *общую* величину A, должна быть определена та, для которой B есть максимум или минимум.

3. Из всех кривых, для которых общими являются величины A и B, должна быть определена та, которая делает величину C максимумом или минимумом и т. д.

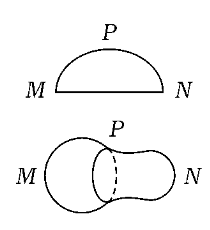


Рис. 228

Задача первого класса есть, например, отыскание *кратчайшей* кривой, проходящей через точки M и N. Если отыскивается кривая *данной* длины A, проходящая через точки M и N и превращающая *площадь* MPN в максимум, то это задача второго класса. Задача третьего класса будет — среди всех кривых данной длины A, проходящих через точки M, N и ограничивающих *равную* поверхность $MPN = B$, отыскать ту кривую, которая, вращаясь около MN, описывает наименьшую поверхность вращения и т. д. Тут же мы заметим, что отыскание абсолютного максимума или минимума, совсем без побочных условий, не имеет никакого смысла. Так, например, все кривые, среди которых в первой задаче отыскивается кратчайшая, имеют еще то *общее* свойство, что они все проходят через точки M и N.

Для решения задач первого класса достаточно изменение *двух* элементов кривой или *одной* точки кривой. Для решения задач второго класса должны быть изменены *три* элемента (или *две* точки кривой), так как измененная часть с неизмененной должна иметь общими свойство A и — так как B должно быть максимумом или минимумом — также значение B, т.е. должны быть выполнены *два* условия. Точно

так же для решения задач третьего класса требуется изменение *четырех* элементов кривой и т. д.

Отсюда видно, что при решении задачи высшего класса решаются также и обратные их значения. Для третьего класса, например, изменяют четыре элемента кривой так, что измененная часть кривой имеет с первоначальной общими значения A и B и (так как C должно стать максимумом или минимумом) также C. Но те же условия должны быть выполнены и тогда, когда среди всех кривых с общими B и C отыскивается кривая с максимумом или минимумом от A, или среди всех кривых с общими A и C отыскивается кривая с максимумом или минимумом от B. Так, если взять пример второго класса, *круг* среди всех линий равной длины A замыкает наибольшую площадь B; и среди всех кривых, заключающих одну и ту же площадь B, *круг* имеет наименьшую длину A. Так как оба условия — чтобы свойство A было общим или чтобы оно стало максимумом — выражаются совершенно одинаковым образом, то Эйлер констатировал возможность сводить задачи высших классов к задачам первого класса. Так, например, чтобы среди всех кривых с общим свойством A найти кривую, которая превращает B в максимум, нужно найти кривую, для которой $A+mB$ становится максимумом, где m есть *произвольная* постоянная величина. Чтобы $A+mB$ не изменяло своего значения для произвольных значений m при изменении искомой кривой, возможно вообще только тогда, когда при этом изменение A в отдельности и изменение B в отдельности $= 0$.

6. Эйлер сделал еще один важный шаг вперед. Для решения задачи отыскания брахистохроны в сопротивляющейся среде — задачи, которую пытались решать он сам и Германн, существующие методы оказались недостаточными. Для брахистохроны в безвоздушном пространстве скорость зависит *только* от глубины падения. Скорость в одной части кривой совсем не зависит от других частей кривой. Можно тогда, действительно, сказать, что каждая произвольно малая часть кривой тоже брахистохрона. В обладающей сопротивлением среде дело обстоит иначе: вся длина и форма предыдущего пути имеет влияние на скорость в элементе пути. Вся кривая может быть брахистохроной, хотя каждая малая часть ее и не обнаруживает этого свойства. Подобного рода рассуждениями Эйлер пришел к той мысли, что введенный Якобом Бернулли принцип не имеет общего значения, а в случаях указанного рода оказывается необходимость в более подробном исследовании.

7. При помощи множества задач и облегчающей обзор систематизации их Эйлеру мало-помалу удалось установить в существенных чертах те самые методы, которые впоследствии по-своему развил Лагранж и совокупность которых носит название *вариационного исчисления.* Таким образом, Иоганн Бернулли посредством аналогии нашел *случайное* решение одной задачи. Якоб Бернулли развил для решения аналогичных проблем метод *геометрический.* Эйлер *обобщил* проблемы и геометрический метод. Лагранж, наконец, совершенно освободился от необходимости рассмотрения геометрической фигуры и дал метод *аналитический.* Он заметил, что приращения, которые испытывают функции вследствие изменения *формы* функций, совершенно *аналогичны* приращениям вследствие изменения независимых переменных. Чтобы сохранить однако различие между приращениями, он обозначил первое через δ, а второе через d. Но, усмотрев аналогию, Лагранж получил возможность сейчас же написать уравнения, которые ведут к решению задачи максимума и минимума. Мысль эта оказалась весьма плодотворной, но дальнейшего ее обоснования Лагранж не дал никогда и даже не пытался дать. То, что он дал, чрезвычайно своеобразно. С огромной экономизирующей работу проницательностью он познает основы, которые кажутся ему достаточно прочными и пригодными, чтобы построить на них здание. Сами его основные принципы оправдывают себя своей плодотворностью. Вместо того, чтобы заняться выводом этих основных принципов, он показывает, с каким успехом можно ими пользоваться («Essai d'une nouvelle methode etc», Misc. Taur., 1762).

Как трудно стало современникам Лагранжа и следующим ученым вполне вдуматься в его идеи, убедиться нетрудно. Эйлер тщетно старается объяснить себе различие между вариацией и дифференциалом, для чего он представляет себе, что в функцию входят постоянные, с изменением которых изменяется форма функций. Приращения значения функции, зависящие от приращений этих постоянных, он называет вариациями, а приращения функции, соответствующие приращениям независимой переменной, он называет дифференциалами. Это воззрение приводит к своеобразно боязливому, узкому и непоследовательному пониманию вариационного исчисления, которое, без сомнения, гораздо ниже того понимания, которое мы находим у Лагранжа. Несвободна еще от этого недостатка даже современная и во всем остальном превосходная книга Lindelöf'a. Вполне правильное изложение мысли Лагранжа, на наш взгляд, впервые дано Jellett'ом. Он, по-видимому, высказал то,

что Лагранж, может быть, не сумел высказать вполне, а может быть, и считал излишним вполне высказать.

8. Понимание Jellett'а в кратких чертах сводится к следующему. Подобно тому, как мы рассматриваем значения одних величин, как *постоянные*, а значения других, как *переменные*, а среди последних величин различаем опять-таки независимо (или произвольно) изменяющиеся и зависимо изменяющиеся (переменные), так можно и форму функции рассматривать, как *определенную* или *неопределенную* (переменную). Когда у нас есть переменная форма функции $y = \varphi(x)$, то значение функции y может изменяться как вследствие приращения dx независимой переменной x, так и вследствие изменения *формы*, т. е. перехода от φ к φ_1. Первое изменение есть дифференциал dy, а второе изменение — вариация δy. Мы имеем, следовательно,

$$dy = \varphi(x + dx) - \varphi(x)$$
$$\text{и} \quad \delta y = \varphi_1(x) - \varphi(x).$$

Изменение значения неопределенной функции вследствие изменения формы не заключает в себе еще никакой задачи, как не заключает в себе задачи изменение значения независимой переменной. Можно именно принимать любое изменение формы и с тем вместе любое изменение значения. Задача возникает лишь тогда, когда должно быть указано изменение значения *определенной* по форме функции F от другой (содержащейся в ней) неопределенной функции φ — изменение, вызванное *изменением формы* этой последней функции. Когда дана, например, плоская кривая *неопределенной* формы $y = \varphi(x)$, то *длина дуги* ее между абсциссами x_0 и x_1

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

есть *определенная* функция этой неопределенной функции. Раз принята определенная форма кривой, может быть сейчас указано значение S. Для каждого изменения формы кривой может быть определена вариация длины дуги δS. В данном примере функция S содержит в себе не прямо функцию y, а ее первую производную $\frac{dy}{dx}$, которая в свою очередь зависит от y. Если $u = F(y)$ есть определенная функция от

неопределенной функции $y = \varphi(x)$, то

$$\delta u = F(y + \delta y) - Fy = \frac{dF(y)}{dy} \delta y.$$

Пусть $u = F\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ есть определенная функция от неопределенной функции $y = \varphi(x)$. Для изменений формы функции φ значение y изменяется на δy и значение $\dfrac{dy}{dx}$ на $\delta \dfrac{dy}{dx}$. Соответствующее изменение значения функции u будет

$$\delta u = \frac{dF\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)}{dy} \delta y + \frac{dF\left(y, \dfrac{dy}{dx}\right)}{dy} \delta \frac{dy}{dx}.$$

Выражение $\delta \dfrac{dy}{dx}$ получается, согласно определению, так:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d(y + \delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx}.$$

Таким же образом без затруднения находят

$$\delta \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 \delta y}{dx^2} \quad \text{и т. д.}$$

Перейдем теперь к решению задачи. Рассмотрим, для какой формы функции $y = \varphi(x)$ выражение

$$U = \int\limits_{x_0}^{x_1} V\, dx,$$

в котором

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots\right)$$

получает значение максимума или минимума, причем φ есть неопределенная, а F — определенная функция. Значение U может изменяться только в случае изменения пределов x_0, x_1, ибо изменение независимой

переменной x, как таковой, за пределами не имеет никакого влияния на U. Если будем считать пределы постоянными, то на x нам нечего более обращать внимания. Но, кроме того, значение U изменяется только в случае изменения *формы* функции $y = \varphi(x)$, вызывающего изменение *значения* величин:

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\ \cdots \quad \text{на} \quad \delta y,\ \delta\frac{dy}{dx},\ \delta\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Все изменение функции U, которое мы обозначим через DU и для выражения условия максимума и минимума приравниваем нулю, состоит из дифференциала dU и вариации δU. Таким образом, имеем

$$DU = dU + \delta U = 0.$$

Мы находим поэтому

$$DU = V_1 dx_1 - V_0 dx_0 + \delta \int\limits_{x_0}^{x_1} V\,dx = V_1\,dx_1 - V_0\,dx_0 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \delta V\,dx = 0.$$

$V_1\,dx_1$ и $V_0\,dx_0$ суть здесь элементы, прибавляющиеся или отпадающие при изменении пределов.

Далее мы, согласно сказанному выше, имеем

$$\delta V = \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}}\delta\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\delta\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots =$$

$$= \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}}\delta\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots$$

В целях сокращения принимаем

$$\frac{dV}{dy} = N, \qquad \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}} = P_1, \qquad \frac{dV}{d\frac{d^2y}{dx^2}} = P_2, \cdots$$

Мы получаем тогда

$$\delta\int\limits_{x_0}^{x_1} V\,dx = \int\limits_{x_0}^{x_1}\left(N\delta y + P_1\frac{d\delta y}{dx} + P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2} + P_3\frac{d^3\delta y}{dx^3} + \cdots\right)dx.$$

Здесь обзор затрудняется тем, что во второй, правой части уравнения встречаются не только δy, но и выражения $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{d^2x}$, ... и т. д., которые хотя и зависят друг от друга, но не в посредственно очевидной форме. Этот недостаток может быть устранен, если многократно применять формулу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Тогда получаем

$$\int P_1\frac{d\delta y}{dx}dx = P_1\delta y - \int \frac{dP_1}{dx}\delta y\,dx$$

$$\int P_2\frac{d^2\delta y}{dx^2}dx = P_2\frac{d\delta y}{dx} - \int \frac{dP_2}{dx}\frac{d\delta y}{dx}\,dx =$$

$$= P_2\frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx}\delta y + \int \frac{d^2P_2}{dx^2}\delta y\,dx \quad \text{и т. д.}$$

Последовательно проинтегрировав эти выражения в данных пределах, мы получаем для условия $DU = 0$ выражение

$$0 = V_1\,dx_1 - V_0\,dx_0 +$$

$$+ \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \cdots\right)_1 \delta y_1 - \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \cdots\right)_0 \delta y_0 +$$

$$+ \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \cdots\right)_1 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_1 - \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + \cdots\right)_0 \left(\frac{d\delta y}{dx}\right)_0 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} + \frac{d^3P_3}{dx^3} + \cdots\right) \delta y\,dx.$$

В этом выражении мы находим под интегралом еще только δy.

Здесь члены *первой* строчки *не зависят* от изменения формы функции, а зависят только от изменения *пределов*. Члены последующих строчек, за исключением последней, зависят от изменения формы функции только у *пределов*, а значки 1, 2 указывают на то, что для общих выражений должны быть вставлены предельные величины. Наконец, выражение последней строчки зависит от *изменения формы* функции на всем ее протяжении. Если мы объединим все члены за исключением членов

последней строчки под обозначением $\alpha_1 - \alpha_0$ и обозначим выражение в скобках последней строчки через β, мы получим

$$0 = \alpha_1 - \alpha_0 + \int_{x_0}^{x_1} \beta\,\delta y\,dx.$$

Из этого же уравнения следует

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 0, \tag{1}$$

$$\text{и} \quad \int_{x_0}^{x_1} \beta\,\delta y\,dx = 0. \tag{2}$$

Если бы каждый из членов в отдельности не был равен нулю, то один определялся бы другим. Но интеграл неопределенной функции не может быть дан *только* значениями ее близ пределов. Поэтому для того, чтобы вообще

$$\int_{x_0}^{x_1} \beta\,\delta y\,dx = 0,$$

необходимо — так как выражения δy во всем выводе произвольны — чтобы $\beta = 0$. Таким образом, уравнением

$$N - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \frac{d^3P_3}{dx^3} + \cdots = 0 \tag{3}$$

определяется природа функции $y = \varphi(x)$, которая превращает выражение U в максимум или минимум. Уравнение (3) найдено еще Эйлером. Применение же уравнения (1) для определения функции через его предельные условия найдено лишь Лагранжем. ***Форма*** функции $y = \varphi(x)$ определяется, правда, в ***общем*** уравнением (3), которому она должна удовлетворять. Но в последнем содержится несколько ***произвольных*** постоянных, значение которых определяется только условиями у пределов. Относительно обозначений Jellett правильно замечает, что тот способ обозначения первых двух членов $V_1\delta x_1 - V_0\,dx_0$ в уравнении (1), которым пользуется Лагранж, непоследователен и он для приращений ***независимой*** переменной пользуется обыкновенными обозначениями dx_1, dx_0.

9. Чтобы выяснить употребление найденных нами уравнений, попробуем отыскать форму функции, которая превращает выражение

$$\int\limits_{x_0}^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

в минимум, т. е. кратчайшую линию. Здесь

$$V = F\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Все выражения, кроме

$$P_1 = \frac{dV}{d\frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

исчезают в уравнении (3) и это последнее получает форму $\frac{dP_1}{dx} = 0$, что означает, что P_1, а следовательно, и единственная содержащаяся здесь переменная величина $\frac{dy}{dx}$, не зависят от x. Поэтому $\frac{dy}{dx} = a$ и $y = ax + b$, где a и b означают постоянные величины.

Постоянные a, b должны быть определены через предельные условия. Чтобы прямая проходила через точки x_0, y_0 и x_1, y_1, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} y_0 = ax_0 + b \\ y_1 = ax_1 + b \end{cases} \tag{4}$$

и уравнение (1) отпадает, так как $dx_0 = dx_1 = 0$, $\delta y_0 = \delta y_1 = 0$. Коэффициенты $\delta\frac{dy}{dx}$, $\delta\frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. сами выпадают. Таким образом, значения величин a и b определяются исключительно уравнениями (4).

Если даны только предельные величины x_0, x_1, а величины y_0, y_1 остаются неопределенными, то $dx_0 = dx_1 = 0$ и уравнение (1) получает форму

$$\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}(\delta y_1 - \delta y_0) = 0,$$

каковое уравнение при произвольности δy_0 и δy_1 может быть осуществлено только тогда, когда $a = 0$. В этом случае выражение прямой есть $y = b$; она остается параллельной оси абсцисс на произвольном от нее расстоянии, так как b остается неопределенным.

Нетрудно заметить, что в общем уравнение (1) и побочные условия (в приведенном выше примере (4)) в отношении определения постоянных дополняют друг друга. Для того, чтобы выражение

$$Z = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

превратилось в минимум, интеграция соответствующего уравнения (3) дает выражение

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}}\right).$$

Если Z есть минимум, то и $2\pi Z$ есть минимум и найденная кривая дает при вращении около оси абсцисс наименьшую поверхность вращения. Минимуму от Z соответствует также самое низкое положение центра тяжести кривой, которая мыслится однородной и тяжелой. Кривая эта есть, следовательно, цепная линия. Определение постоянных c, c' производится, как раньше, при помощи предельных условий.

При решении задач механики различают приращения координат dx, dy, dz, *действительно* наступившие в течение времени, и *возможные* перемещения δx, δy, δz, которые иногда принимаются во внимание (например, в случае применения принципа возможных перемещений). Последние в общем не вариации, т. е. не изменения значений, зависящие от изменений формы какой-нибудь функции. Только тогда, когда мы рассматриваем механическую систему, представляющую одно неразрывное целое, как, например, нить, гибкая поверхность, упругое тело, жидкость, мы можем выражения δx, δy, δz рассматривать, как неопределенные функции координат x, y, z, и мы тогда имеем дело с вариациями.

Не наша задача излагать здесь и развивать какие-нибудь математические теории. Мы должны обсудить специально естественно-научную часть механики. Но история изопериметрической проблемы и вариационного исчисления не могла не быть затронута, так как соответственные исследования оказали большое влияние на развитие механики. Изучение упомянутых здесь задач настолько обострило взгляд

на более общие свойства систем вообще и на свойства максимума и минимума в особенности, что очень легко было открывать подобные свойства в системах механических. И действительно, со времени Лагранжа охотно выражают более общие положения механики в форме положений максимума и минимума. Эта склонность оставалась бы непонятной для человека, незнакомого с историческим развитием науки.

2. Теологические, анимистические и мистические точки зрения в механике

1. Когда мы попадаем в какое-нибудь общество, в котором идет речь об очень благочестивом муже, то пока мы не услышим его имени, нам невольно приходит в голову тайный советник X или какой-нибудь господин фон Y, но вряд ли кому-либо придет в голову имя какого-нибудь специалиста-естествоиспытателя. Тем не менее ошибочно было бы думать, что эти несколько натянутые отношения между естественнонаучным и теологическим воззрением на мир — отношения, порой выливающиеся в ожесточенную борьбу, — существовали так везде и во все времена. Достаточно одного взгляда на историю естествознания, чтобы убедиться в противном.

Конфликты между наукой и теологией или — вернее сказать — с церковью — тема, которой занимаются весьма охотно. И действительно, это тема богатая и благодарная. С одной стороны, разворачивается весьма богатый реестр прегрешений церкви против прогресса, а с другой — внушительный ряд мучеников, украшенный такими именами, как Джордано Бруно и Галилей, и куда едва не попал, избегнув этого только благодаря чрезвычайно благоприятно сложившимся условиям, такой благочестивый человек, как Декарт. Но эти конфликты были уже достаточно описаны и, если останавливаться только на них, человек становится односторонним, а потому и несправедливым. Человек легко тогда приходит к тому взгляду, будто бы наука была задержана в своем развитии *только* давлением церкви и сейчас же достигла бы необычайного развития, если бы *только* этого давления не было. Верно, конечно, то, что борьба научных исследователей против чуждой внешней силы не была незначительна. В этой борьбе церковь не брезгала также ни одним средством, которое могло бы повести к победе, и она была при этом эгоистичнее, беспощаднее и более жестока, чем какая бы то ни было другая политическая партия. Но не малую борьбу этим научным исследователям приходилось вести с собственными

традиционными идеями, и именно с тем предрассудком, будто все следует рассматривать с теологической точки зрения. Только мало-помалу и медленно этот предрассудок был преодолен.

2. Предоставим слово фактам и сделаем предварительно несколько личных знакомств.

Napier, изобретатель логарифмов, строгий пуританин, живший в XVI столетии, был между прочим ревностным теологом. Он пускался в чрезвычайно странные умозрения. Он написал истолкование Апокалипсиса с пропозициями и математическими доказательствами. Пропозиция 26, например, утверждает, что папа антихрист, пропозиция 36 учит, что саранча это турки и магометане и т. д.

Б. Паскаль (XVII столетие), один из самых гениальных мыслителей в области математики и физики, был чрезвычайно ортодоксален и большим аскетом. Несмотря на свой мягкий характер, он в Руане по искреннему убеждению донес на одного учителя философии, как на еретика. Исцеление его сестры прикосновением к одной реликвии произвело на него сильное впечатление, и он увидел в этом чудо. Если и не придавать всему этому большого значения, потому что вся его семья, склонная к религиозному экстазу, была в этом пункте весьма слаба, то все же достаточно и других примеров этого рода. Глубокая религиозность Паскаля обнаружилась в его решении совершенно отказаться от науки и посвятить всю свою жизнь христианству. Когда он нуждался в утешении, он говаривал обыкновенно, что он может обрести его только в учении Христа и что вся мудрость мира не может принести ему никакой пользы. Что он серьезно относился к делу обращения еретиков, доказывают его «Lettres provinciales» («Провинциальные письма»), где он горячо восстает против ужасающих хитросплетений, придуманных докторами Сорбонны специально для преследования янсенистов. Очень удивительна переписка Паскаля с различными теологами: с немалым удивлением мы можем в них читать, как Паскаль в одном из этих писем самым серьезным образом обсуждает вопрос, может ли и черт творить чудеса.

Отто фон Герике, изобретатель воздушного насоса, в самом начале своей книги, обнародованной всего лет двести тому назад, занимается чудом Иисуса Навина, которое он пытается согласовать с системой Коперника. И впереди исследований относительно пустого пространства и относительно природы воздуха мы находим у него вопросы о месте неба, ада и т. д. Хотя Герике и пытается разрешить эти вопросы по

возможности разумно, тем не менее видно, сколько они заставляют его задумываться, а между тем это те самые вопросы, над которыми в настоящее время образованный теолог и не задумается. А ведь в Герике мы имеем перед собой человека, жившего после реформации.

И Ньютон не находил ниже своего достоинства заниматься объяснением Апокалипсиса. О таких вещах трудно было с ним говорить. Когда Галлей однажды позволил себе какую-то шутку по поводу теологических споров, Ньютон, рассказывают, коротко отрезал ему следующим замечанием: «Я изучал эти вещи, а вы нет».

На Лейбнице, изобретателе лучшего мира и предустановленной гармонии, чье изобретение нашло заслуженную оценку в смешном с виду, но в действительности глубоко серьезном философском романе «Кандид» Вольтера, нам нет надобности останавливаться. Он был, как известно, почти в такой же мере теологом, как философом и естествоиспытателем.

Обратимся к ученому XVIII столетия. В своих «Письмах к немецкой принцессе» Эйлер среди вопросов естественнонаучных обсуждает и вопросы теологические и философские. Он обсуждает вопрос о том, как трудно ввиду полного различия между телом и духом — различие, которое не внушает ему никаких сомнений — понять взаимодействие обоих. Правда, ему не очень нравится и система окказионализма, развитая Декартом и его последователями — система, по которой Бог для каждого намерения души осуществляет соответствующее движение тела, ибо душа сама не в состоянии этого сделать. Он не без остроумия осмеивает также и предустановленную гармонию, по которой от вечности существует согласие между движениями тела и намерениями души, хотя между телом и душой нет никаких связей, как существует согласие между двумя различными, но с равным ходом часами. Он замечает, что, согласно этому воззрению, собственное его тело в сущности столь же чуждо ему, как тело какого-нибудь носорога в Африке, которое в такой же мере могло бы быть в предустановленной гармонии с его душой. Послушаем его самого. В то время писали почти исключительно по латыни. Если какой-нибудь немецкий ученый хотел особенно снизойти и писать по-немецки, то он писал по-французски: «Si dans le cas d'un dérèglement de mon corps Dieu ajustait celui d'un Rhinoceros, ensorte, que ses mouvements fussent tellement d'accord avec les ordres de mon âme, qu'il levât la patte au moment que je voudrais lever la main, et ainsi des autres opérations, ce serait alors mon corps. Je me trouverais subitement dans

la forme d'un Rhinoceros au milieu de l'Afrique, mais non obstant cela mon âme continuerait les mêmes operations. J'aurais également I'honneur d'écrire à V. A., mais je ne sais pas comment elle recevrait mes lettres». («Если бы в случае каких-либо нарушений в моем теле Бог связал их с нарушениями в теле какого-нибудь носорога, если бы движения этого последнего были настолько связаны с движениями моей души, что он поднимал бы лапу в тот момент, когда я пожелаю поднять свою руку, и так обстояло бы дело со всеми другими операциями, то это было бы тогда моим телом. Я бы оказался внезапно в теле носорога посреди Африки, но, несмотря на это, моя душа продолжала бы те же операции. Я продолжал бы иметь честь писать Вашему Высочеству, но я не знаю, как вы получали бы мои письма»). Так и кажется, что Эйлеру вдруг захотелось раз стать Вольтером. И тем не менее, несмотря на то, что он своей критикой попадает в самую суть дела, взаимодействие между телом и душой остается для него чудом. И тем не менее он при помощи весьма больших софизмов отделывается от вопроса о свободе воли. Чтобы дать представление о том, какие вопросы мог в то время обсуждать естествоиспытатель, заметим, что Эйлер в своих «Письмах» по физике обсуждает вопросы о природе духов, о связи между телом и душой, о свободе воли, о влиянии свободы на события в мире, о молитве, о физическом и моральном зле, об исправлении грешников и тому подобных вещах. И все это содержится в том самом сочинении, в котором мы находим такое множество ясных физических идей и такое прекрасное изложение логики с помощью кругов.

3. Удовольствуемся покуда этими примерами. Мы с намерением выбрали такие, которые касаются *первых* естествоиспытателей. Все теологическое, которое мы нашли у этих мужей, составляет часть их самой сокровенной частной жизни. Они откровенно рассказывают нам о вещах, о которых рассказывать они вовсе не обязаны, о которых они могли бы умолчать. То не чуждые, навязанные им взгляды, это собственное их мнение. Они не чувствуют себя подавленными, стесненными теологией. В таком городе и при таком дворе, где жили Ламеттри и Вольтер, Эйлер не имел никаких оснований скрывать свои убеждения.

По нашему современному мнению эти ученые должны были бы, по меньшей мере, заметить то, что вопросы эти вовсе не относятся туда, где они их обсуждают, что это вовсе не вопросы естественнонаучные. Но хотя это противоречие между традиционными теологическими и созданными ими самими естественнонаучными убеждениями и про-

изводит на нас странное впечатление, ничто не дает нам права из-за этого меньше уважать этих ученых. Ибо именно это и доказывает всю огромную силу их ума, что, несмотря на ограниченные воззрения своего времени, от которых им не суждено было совершенно отделаться, им все же удалось настолько расширить свой кругозор и помочь нам стать на точку зрения более свободную.

Человек беспристрастный не усомнится в том, что эпоха, на которую приходится главным образом развитие механики, была *настроена теологически*. Все сводилось к вопросам теологическим и на все эти вопросы имели влияние. Нет поэтому ничего удивительного в том, что не осталась свободной от этого влияния и механика. Влияние этого теологического настроения станет еще заметнее, если мы остановимся на подробностях.

4. Влияние античного мира через Герона и Pappus'а было отмечено уже в предыдущей главе. Галилея мы находим в начале XVII столетия занятым вопросами о крепости (сопротивлении) материалов. Он показывает, что полые трубки обнаруживают большее сопротивление сгибанию, чем массивные стержни равной длины и равного материала, и пользуется этим фактом познания для объяснения форм костей у животных, которые обыкновенно бывают полыми. Существующее здесь отношение нетрудно наглядно представить при помощи двух листов бумаги, из которых один сложен плоско, а другой скатан в трубку. В случае горизонтальной балки, укрепленной с одной стороны, а с другой нагруженной, можно, не уменьшая ее крепости, сделать нагруженный конец тоньше и тем выгадать на материале. Галилей определяет форму балки с равным сопротивлением в каждом поперечном разрезе. Наконец, он замечает еще, что геометрически подобные животные, но весьма различной величины, отвечали бы законам крепости в весьма неравной мере.

Формы костей, перьев, стеблей и других органических образований, до мельчайших подробностей целесообразные и действительно способные произвести глубокое впечатление на образованного наблюдателя, многократно приводились и до настоящего времени приводятся в доказательство проявляющейся в природе мудрости. Рассмотрим, например, перо птицы. Ствол его есть полая трубка, толщина которой убывает к свободному концу, и, следовательно, тело равного сопротивления. В каждой веточке пера повторяются в малом те же отношения. Потребовались бы очень значительные технические познания, чтобы только

воспроизвести такое перо во всей его целесообразности, не говоря уже о том, чтобы изобрести его. Но нам не следует забывать, что задача науки не только изумляться, но и исследовать. Общеизвестно, как пытается разрешить эти вопросы Дарвин согласно своей теории приспособления. В том, что решение Дарвина полное, можно усомниться; сомневается в этом сам Дарвин. Что могли бы дать все условия среды, если бы не было ничего, что *хочет* приспособляться? Но в одном не может быть сомнения: теория Дарвина есть первая серьезная попытка обратиться от голого изумления перед органической природой к ее исследованию.

Идея Pappus'а о ячейках пчел живо обсуждается еще в течение XVIII столетия. В своем сочинении «Ueber die Nester der Thiere» («О гнездах животных»), обнародованном в 1867 году, Wood рассказывает следующую историю: «Маральди бросилась в глаза чрезвычайная правильность в устройстве ячеек у пчел. Он измерил углы ромбовидных предельных поверхностей их и нашел их равными 109°28′ и 70°32′. Убежденный в том, что эти углы должны находиться в связи с экономией ячейки, Реомюр попросил математика Кенига вычислить ту форму шестиугольного ограниченного тремя ромбами сосуда, в которой величайший объем совпадает с наименьшей поверхностью. Реомюр получил ответ, что углы ромбов должны быть для этого 109°26′ и 70°34′. Таким образом разница составляла не более двух минут. Маклоран, не удовлетворенный полученными результатами, повторил измерения Маральди, нашел их правильными и при повторе вычислений Кенига нашел ошибку в логарифмах, которыми пользовался этот последний. Таким образом, не пчелы, а математик ошибся и пчелы помогли найти эту ошибку». Кому известно, как измеряются кристаллы и кому случалось видеть ячейки пчел, имеющие довольно шероховатые и матовые поверхности, тот усомнится в том, чтобы можно было при измерении этих ячеек достичь точности в две минуты. История эта, следовательно, есть не что иное, как благонамеренная сказка математика. К тому же из нее ничего и не следовало бы, если бы она и была верна. Между прочим заметим еще, что задача математически была поставлена слишком неполно, чтобы можно было судить, в какой мере ее решили пчелы.

Идеи Герона и Ферма о движении света, изложенные в предыдущей главе, получили тотчас же теологическую окраску у Лейбница и сыграли, как мы уже упоминали, выдающуюся роль в развитии ва-

риационного исчисления. В переписке Лейбница с Иоганном Бернулли неоднократно затрагивались рядом с математическими вопросами и вопросы теологические. Нередко здесь речь идет и в образах, заимствованных из Библии. Так, например, Лейбниц говорит, что проблема брахистохроны притягивала его, как яблоко Еву.

Мопертюи, известный президент Берлинской Академии и любимец Фридриха Великого, дал новый толчок теологическому направлению в физике провозглашением своего принципа наименьшего действия. Сочинение, в котором он выставил и притом в весьма неопределенной форме свой принцип, обнаруживает большое отсутствие у автора математической ясности. В этом сочинении он объявляет свой принцип тем, что наилучшим образом соответствует мудрости Творца. Мопертюи обладал блестящим, но не глубоким умом. Он всегда носился с различными смелыми планами: то он предлагал основать город, в котором говорили бы только по латыни, то вырыть в земле большую глубокую яму, чтобы найти там новые вещества, то заняться психологическими исследованиями, основанными на действии опиума и анатомировании обезьян, то предлагал объяснять образование зародыша при помощи силы тяготения и т. д. Он подвергался резкой критике со стороны Вольтера в книге последнего «Histoire du docteur Akakia» («История доктора Акакия») — книге, приведшей, как известно, к разрыву между Фридрихом и Вольтером.

Принцип Мопертюи скоро исчез бы с горизонта, если бы Эйлер не использовал его. Как человек, поистине выдающийся, он оставил название принципа, Мопертюи предоставил славу изобретения его и, вложив в него другое содержание, сделал из него принцип новый, действительно полезный. Что думал Мопертюи, трудно выяснить с достаточной ясностью. Но что думает Эйлер, легко показать на простых примерах. Если какое-нибудь тело вынуждено бывает оставаться на твердой поверхности, например, на поверхности земного шара, то под действием толчка оно движется так, что путь его от начальной до конечной его точки есть путь кратчайший. Всякий другой путь, который мы приписали бы телу, был бы длиннее и продолжался бы дольше. Принцип этот находит применение в теории воздушных и водяных течений на земной поверхности. Теологическую точку зрения Эйлер сохранил. Он говорит, что можно объяснять явления не только из физических *причин*, но и из *цели* их. «Так как устройство всего мира — наиболее совершенное и так как оно исходит от мудрейшего Творца, то ничего не происходит в ми-

ре, из чего не вытекало бы ясно какое-нибудь свойство максимума или минимума; поэтому не может быть сомнения в том, что все действия в мире могут быть методом максимума и минимума выведены из целей, как и из самих действующих причин».[1]

5. Под влиянием тех же теологических идей развились и основные представления всего современного естествознания, каковы представления о неизменности количества материи, о неизменности суммы движения, о неразрушимости работы или энергии. Положило им начало упомянутое уже выше изречение Декарта в «Принципах философии», согласно которому сотворенные изначала количество материи и количество движения остаются неизменными, что одно совместимо с постоянством Творца мира. Представление о том, как следует исчислять сумму движения, подверглось очень значительным изменениям от Декарта до Лейбница и впоследствии у их последователей, и так постепенно возникло то, что в настоящее время носит название «закона сохранения энергии». Но теологический фон исчезал лишь весьма постепенно. Нельзя отрицать того, что даже и в настоящее время найдется не один естествоиспытатель, облекающий своей мистикой этот закон сохранения энергии.

В течение всех XVI и XVII столетий до конца XVIII столетия существовала склонность усматривать везде, во всех физических законах, особый порядок Творца. Но от внимательного наблюдателя не ускользнет постепенное видоизменение взглядов. В то время, как у Декарта и Лейбница физика часто перемешана еще с теологией, позднее ясно намечается стремление, правда, не совсем устранить все теологическое, но отделить его от физического исследования. Первое переносится к началу или к концу физического исследования. Теологическое по мере возможности стараются сконцентрировать на моменте творения мира, чтобы во всем остальном очистить место для физики.

И вот в конце XVIII столетия наступил поворот. С внешней стороны этот последний кажется странным и как бы внезапным, но по существу он представляет лишь необходимое следствие из намеченного уже хода развития. В одной своей юношеской работе Лагранж попытался

[1]Quum enim mundi universi fabrica sit perfectissima, atque a creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non maximi minimive ratio quaepiam eluceat; quam ob rem dubinm prorsus est nullum, quin omnes mundi effectus ex causis finalibus, ope methodi maximorum et minimorum, atque feliciter determinari quaeant, atque ex ipsis causis efficientibus. («Methodus inveniendi lineascurvas maximi minimive proprietate gaudentes», Lausannae, 1744).

обосновать всю механику на эйлеровом принципе наименьшего действия. Выпуская то же сочинение в новой обработки, он заявляет, что он желает совершенно отвлечься от всех теологических и метафизических умозрений, как весьма *рискованных* и ничего общего с наукой не имеющих. Он возводит новое здание механики на другой основе, и ни один специалист не может отрицать преимуществ последнего. Все последующие выдающиеся естествоиспытатели примкнули к взгляду Лагранжа, и этим в существенных чертах определилось современное отношение между физикой и теологией.

6. Таким образом, потребовалось почти три столетия, чтобы взгляд, что теология и естествознание две вещи различные, развился от первых своих зародышей у Коперника до полной ясности у Лагранжа. Нельзя однако при этом отрицать того, что величайшим умам, каким был Ньютон, истина эта всегда была ясна. Несмотря на всю свою глубокую религиозность, Ньютон никогда не смешивал теологии с вопросами естественнонаучными. Правда, и у него в его «Оптике», несмотря на всю ясность ума, которая светится даже на последних ее страницах, мы находим в конце сокрушение автора по поводу ничтожности всего земного. Но в *самих* его оптических исследованиях, в противоположность исследованиям Лейбница, теологии нет и следа. То же самое можно сказать о Галилее и Гюйгенсе. Идеи, развиваемые ими в своих сочинениях, находятся почти в полном согласии с точкой зрения Лагранжа и в этом направлении эти сочинения могут считаться классическими. Но воззрение и настроение какой-нибудь эпохи характеризуется не высшими, а средними ее представителями.

Чтобы до некоторой степени понять описанный здесь процесс, нам нужно принять в соображение следующее. Вполне естественно, что на той ступени культуры, на которой единственное почти образование, а следовательно, и единственное мировоззрение представлено религией, должно существовать мнение, что все следует рассматривать с теологической точки зрения и что такая точка зрения должна быть достаточной везде. Если мы перенесемся в то время, когда приходилось все делать руками, когда для того, чтобы считать, нужно было иметь перед собою надписанную таблицу умножения, когда приходилось кулаком достигать того, что в настоящее время делается головой, то от такого времени мы не будем требовать, чтобы оно относилось *критически* к собственным своим взглядам. Но этот предрассудок медленно и постепенно исчезает по мере расширения кругозора благодаря вели-

ким географическим, техническим и естественнонаучным открытиям и изобретениям XV и XVI столетий, с открытием областей, на которых с этим воззрением ничего добиться было нельзя, потому что оно образовалось *до* знания этих областей. Трудно все же понять эту большую свободу мышления, которая встречается у отдельных индивидуумов, сначала у поэтов, а потом у научных исследователей, уже в ранние моменты средневековья. Просвещение было тогда, вероятно, делом единичных, совершенно необычных людей и было связано с воззрениями остального народа лишь весьма тонкими нитями, так что было скорее способно искажать эти воззрения и тревожить их, чем преобразовывать. Только в литературе XVIII столетия просвещение получило, по-видимому, более широкую сферу действия. Здесь уже соприкасаются между собою науки гуманистические, философские, исторические и естественные, побуждая друг друга к более свободному мышлению. Всякий, кто тоже пережил это возрождение, это освобождение, хотя бы только отчасти, через посредство литературы, сохранит на всю жизнь элегическую тоску по XVIII столетию.

7. Итак, старая точка зрения оставлена. Только форма принципов механики повествует нам еще об ее истории. Эта форма кажется странной лишь до тех пор, покуда не принимается во внимание ее происхождение. Теологическая точка зрения мало-помалу уступала место точке зрения весьма здравой, но связанной с значительной долей уяснения. Отметим этот процесс в кратких чертах.

Когда мы говорим, что свет распространяется по пути кратчайшего времени, то уже это дает нам возможность кое-что обозреть. Но мы не знаем еще, *почему* свет предпочитает пути кратчайшего времени. С допущением мудрости Творца мы отказываемся от дальнейшего понимания. В настоящее время мы знаем, что свет распространяется *всеми* путями, но что только на путях кратчайшего времени световые волны настолько усиливаются, что получается заметный результат. Таким образом, только *кажется*, что свет распространяется только по пути кратчайшего времени. С устранением этого предрассудка были вскоре констатированы случаи, в которых рядом с мнимой экономией природы наблюдалась чрезвычайная ее расточительность. Такую расточительность доказал, например, Якоби по поводу эйлерового принципа наименьшего действия. Некоторые явления природы только потому, следовательно, производят впечатление экономии, что они именно тогда только бывают видимы, когда случайно происходит экономия эф-

фектов. Это — та же идея в области неорганической природы, которую констатировал Дарвин в области природы органической. Мы инстинктивно облегчаем себе понимание природы, перенося на нее привычные нам экономические представления.

Иногда процессы природы потому обнаруживают свойства максимума или минимума, что в этом случае максимума или минимума отпадают причины дальнейшего изменения. В цепной линии положение центра тяжести потому наиболее низкое, что только в случае наиболее низкого положения центра тяжести никакое дальнейшее падение звеньев цепи невозможно. Жидкости потому обнаруживают минимум поверхности под действием молекулярных сил, что устойчивое равновесие может существовать только тогда, когда молекулярные силы не могут более уменьшать поверхность жидкостей. Таким образом, суть дела не в максимуме или минимуме, а в отпадении *работы* в этом состоянии — работы, которая и есть определяющее начало изменения. Поэтому, вместо того, чтобы говорить о стремлении природы к экономии, следует говорить так: «происходит всегда лишь столько, сколько может происходить ввиду существующих сил и условий». Это звучит гораздо менее возвышенно, но зато более понятно и вместе с тем более правильно и носит более общий характер.

Здесь можно с полным основанием задать нам следующий вопрос: если теологическая точка зрения, приведшая к установлению принципов механики, была ложна, то как же объяснить то, что эти принципы тем не менее в существе своем правильны? Ответить на этот вопрос не трудно. Во-первых, теологическое воззрение не дало *содержания* этих принципов, а только определило *окраску* выражения, между тем как содержание получено было наблюдением. Подобным же образом могло бы подействовать и другое господствующее воззрение, например, *меркантильное*, которое, вероятно, и оказало влияние на мышление Стевина. Во-вторых, само теологическое воззрение на природу обязано своим происхождением стремлению к достижению *более обобщающего взгляда*, т. е. стремлению, свойственному также и естествознанию и вполне совместимому с его целями. Поэтому, если теологическая натурфилософия оказалась предприятием неудачным, если в ней следует усмотреть возвращение к более низкой ступени культуры, то отсюда еще не следует, что мы должны отказаться от *здоровых корней*, которые дали ей начало и которые ничем не отличаются от корней истинного исследования природы.

И действительно, естествознание одним изучением *единичного* ничего достичь не может, если оно временами не обращается взглядом к *великому*. Вспомним, что и законы падения тел Галилея, и принцип живых сил Гюйгенса, и принцип возможных перемещений и даже понятие массы могли быть получены только тем, что изучались попеременно то единичное, то целое в процессах природы. Когда мы воспроизводим механические процессы природы в наших мыслях, то можно исходить из свойств отдельных масс (из элементарных законов) и потом сложить образ всего процесса. Но можно также держаться свойств всей системы (законов интегральных). Но так как в свойствах одной массы всегда содержатся уже те или другие отношения к другим массам, например, в скорости и ускорении содержится уже отношение к времени, а следовательно, ко всему миру, то отсюда ясно, что *чистых* элементарных законов собственно вовсе нет. Было бы поэтому непоследовательно, если бы кто захотел этот необходимый взгляд на целое, на более общие свойства совершенно исключить как менее надежный. Нам остается только одно: чем обобщеннее новый принцип и чем больше его значение, тем *лучшей проверки* его мы должны требовать, принимая во внимание возможность ошибок.

Представление о действии воли и интеллекта в природе вовсе не есть исключительное создание христианского монотеизма. Это представление вполне знакомо эпохе язычества и фетишизма. Разница только та, что язычество усматривает волю и интеллект в единичном, между тем как монотеизм предполагает выражение его в целом. Впрочем, чистого монотеизма в действительности совсем нет. Иудейский монотеизм Библии вовсе не свободен от веры в злых духов, кудесников и ведьм, а христианский монотеизм средневековья еще гораздо богаче такими языческими представлениями. Пытки, которым подвергали ведьм церковь и государство, костры, которые они им воздвигали, превратились в какой-то спорт, обязанный однако своим происхождением большей частью не любостяжанию, а именно упомянутым здесь представлениям, но об этом зверском спорте мы здесь говорить не будем. В своей поучительной книге «О начатках культуры» Тэйлор изучил колдовство, суеверия и веру в чудеса, встречающиеся у всех диких народов, и сравнил их с мнениями о колдовстве, существовавшими в средние века. Сходство действительно поразительное. И сжигание ведьм — явление, столь обычное в Европе XVI и XVII столетий, ревностно практикуется еще в настоящее время в Центральной Африке. И у нас, до-

казывает Тэйлор, сохранились еще следы этого в некоторых обычаях, понимание которых пропало с изменением общей точки зрения.

8. Естествознание лишь очень медленно освободилось от этих представлений. Еще в знаменитой книге Porta («Magia naturalis»), вышедшей в свет в XVI столетии и содержавшей важные физические открытия, мы находим еще колдовство и чертовщину всякого рода, мало уступающие тем, которые содержатся в индусской книге по медицине. Только с обнародованием сочинения Жильбера «De magnete» (1600) всей этой чертовщине был положен известный предел. Если еще Лютер утверждает, что он лично встречался с чертом, если Кеплер, тетка которого была сожжена, как ведьма, и мать которого чуть ли не постигла та же участь, говорит, что нельзя отрицать существование ведьм, и если он не осмеливается свободно высказывать свое мнение об астрологии, то этого достаточно, чтобы живо представить себе мышление людей менее просвещенных.

И современное естествознание сохранило еще в своих «силах» коекакие следы фетишизма, на что правильно указывает Тейлор. А то, что языческие воззрения не изжиты еще, не оставлены образованным обществом, доказывает та нелепая пошлая шумиха спиритов, которой полон в настоящее время весь мир.

Если эти представления так упорно не исчезают, то этому есть основательная причина. Из инстинктов, владеющих человеком с демонической силой, под действием которых он помимо своего ведома и понимания питается, сохраняется и размножается, из этих инстинктов, мощные патологические проявления которых столь характерны для средних веков, только очень небольшая часть доступна научному анализу и отвлеченному познанию. Основная черта всех этих инстинктов есть чувство связи и однородности со всей природой. Это чувство может быть на время заглушено односторонними интеллектуальными занятиями, но никогда оно не может быть задушено и оно, без сомнения, имеет и *здоровое ядро*, несмотря на все чудовищные религиозные представления, источником которых оно являлось.

9. Французским энциклопедистам XVIII столетия казалось, что близок уже момент, когда явится возможность дать физико-механическое объяснение всей природе. Лаплас представлял себе такой ум, который мог бы указать движение мира на все времена, если бы только ему были раз даны все массы с их положениями и начальными скоростями. Вся эта радостная переоценка значения достигнутых физико-

механических воззрений в XVIII столетии вполне простительна, представляя даже прекрасную, благородную, возвышенную картину, и мы живо можем сочувствовать этой интеллектуальной радости, единственной в истории.

Но по истечении столетия, после того, как мы стали рассудительнее, это проектированное энциклопедистами мировоззрение представляется нам *мифологией механической* в противовес к мифологии *анимистической* древних религий. И то и другое воззрение содержат неправильные фантастические преувеличения одного одностороннего познания. Разумное же физическое исследование приведет к анализу чувственных ощущений. Мы тогда познаем, что наш голод не столь уж существенно различен от стремления серной кислоты к цинку и наша воля не так уж различна от давления камня на подставку, как это кажется в настоящее время. Мы тогда снова почувствуем себя ближе к природе, не разлагая ни себя самих на непонятную более для нас кучу молекул, ни природу — на систему привидений. О *направлении*, в котором следует ожидать выяснения после долгого и трудного исследования, естественно, возможны только предположения. *Предвосхищать* результат или — тем более — пытаться внести его в современное научное исследование значило бы заниматься не наукой, а мифологией.

Естествознание не претендует быть *готовым* мировоззрением, но оно выступает с сознанием, что работает над созданием мировоззрения в будущем. Высшая философия естествоиспытателя именно в том и заключается, чтобы *вынести* не завершенное мировоззрение и предпочесть его мировоззрению, с виду завершенному, но недостаточному. Религиозные воззрения остаются самым интимным *частным делом* каждого человека, покуда он не навязывает их другим и не переносит их на вещи, место которым на другом форуме. Даже естествоиспытатели ведут себя в этом направлении весьма различно, смотря по обширности кругозора и любви их к последовательности.

Естествознание вовсе не задается вопросами о том, что точному исследованию не доступно или еще не доступно. Но если когда-нибудь окажутся доступными области такие, которые теперь для него еще недостижимы, то тогда ни один здравомыслящий человек, честно относящийся к себе и другим, не остановится перед тем, чтобы заменить *мнение* о вещи *знанием* о ней.

Если современное общество часто колеблется, если оно меняет свою точку зрения в одном и том же вопросе в зависимости от настроения

и положения в жизни, подобно регистрам органа, если это не может происходить без глубокой душевной боли, то все это только естественное необходимое последствие половинчатости и переходного состояния его взглядов. Достаточное мировоззрение не может быть *подарено* нам, а мы должны его завоевать! Но только тогда, когда будет предоставлена свобода рассудку и опыту там, где только *они одни* компетентны, мы будем, надо надеяться, ко благу человечества приближаться медленными, постепенными, но верными шагами к тому идеалу *единого* мировоззрения, которое одно совместимо с экономией здоровой души.

3. Аналитическая механика

1. Механика Ньютона есть механика чисто *геометрическая*. Исходя из известных допущений, он развивает свои принципы с помощью конструкций фигур. Ход рассуждений его часто бывает настолько искусственным, что отыскание принципов этим путем, как заметил уже Лаплас, невероятно. Нетрудно заметить также, что построения Ньютона не в такой мере правильны, как построения Галилея и Гюйгенса. Метод Ньютона называется, как метод древних геометров, также и *синтетическим*.

Если из данных допущений делается какой-нибудь вывод, то такой процесс называется *синтетическим*. Если, напротив того, к данному положению или к данным свойствам какой-нибудь фигуры отыскиваются соответствующие условия, то это процесс *аналитический*. Последний метод нашел широкое применение главным образом лишь с применением алгебры к геометрии. На этом основании установился обычай называть метод вычислений вообще аналитическим. То, что в настоящее время называется аналитической механикой в противоположность механике Ньютона, есть — точно говоря — механика, основанная на *вычислениях*.

2. Основа аналитической механики была положена Эйлером («Mechanica, sive motus scientia analytice exposita», Petrop., 1736). Но метод Эйлера напоминал еще древний геометрический метод тем, что он при криволинейных движениях разлагает все силы на силы тангенциальные и нормальные. Существенный шаг вперед мы находим у Маклорана («A complete system of fluxions», Edinb., 1742). Он разлагает все силы по трем неизменным направлениям, благодаря чему все вычисления становятся гораздо более симметричными и поддающимися общему обзору.

3. Наконец высшей ступени своего развития аналитическая механика достигла у Лагранжа. В своей книге («Mechanique analytique», Paris, 1788) Лагранж старается *раз и навсегда* покончить со всеми необходимыми соображениями и возможно больше выразить в одной формуле. Каждый встречающийся случай можно рассматривать по весьма простой симметрической и поддающейся обзору схеме и то, что остается принять еще в соображение, осуществляется чисто механической головной работой. «Механика» Лагранжа есть великолепная работа с точки зрения *экономии* мышления.

В *статике* Лагранж исходит из принципа возможных перемещений. На некоторое число точек масс m_1, m_2, m_3, $\ldots$, известным образом связанных между собой, действуют силы P_1, P_2, P_3, $\ldots$. Если эти точки испытывают бесконечно малые совместные с их связями перемещения $p_1, p_2, p_3, \ldots$, то для случая равновесия $\sum Pp = 0$, причем мы не принимаем во внимание известного исключительного случая, когда уравнение переходит в неравенство.

Отнесем теперь всю систему к прямоугольной системе координат. Координаты точек пусть будут x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $\ldots$. Разложим силы на составляющие X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, $\ldots$, параллельные осям координат, и перемещения разложим на составляющие δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, $\ldots$, тоже параллельные осям координат. При определении работы каждой составляющей силы имеет значение только параллельное перемещение точки ее приложения и выражение принципа есть

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \qquad (1)$$

где следует вставить все показатели для отдельных точек и соответственные выражения сложить.

В качестве основной формулы динамики употребляется принцип д'Аламбера. На точки массы $m_1, m_2, m_3, \ldots$ с координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ действуют составляющие силы $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots$. Но благодаря связям, существующим между массами, эти последние совершают движения, которые могут быть вызваны в *свободных* массах другими силами

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}, \quad m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}, \quad m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} \ \ldots$$

Приложенные силы X, Y, Z, ... и действительные силы

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}\ \dots$$

в системе уравновешивают друг друга. Применив принцип возможных перемещений, мы находим

$$\sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0. \quad (2)$$

4. Таким образом, Лагранж считается с традицией и предпосылает изложение статики изложению динамики. Такой порядок вовсе не был *необходимым*. Можно в такой же мере исходить из положения, что связи (от растяжения которых отвлекаются) не совершают работы или что всякая совершенная работа исходит из приложенных сил. Тогда можно исходить из уравнения (2), которое выражает это положение и которое для случая равновесия (или неускоренного движения) сводится к уравнению (1), как частному своему случаю. Тогда аналитическая механика представляла бы еще более последовательную систему.

Из уравнения (1), в котором соответствующий перемещению элемент работы для случая равновесия равен нулю, легко получить выводы, которые были уже разобраны на стр. 58. Если

$$X = \frac{dV}{dx},\ Y = \frac{dV}{dy},\ Z = \frac{dV}{dz},$$

т. е. если X, Y, Z суть частные производные одной и той же функции координат, то все выражение под знакомь $\sum$ есть вся вариация δV от V. Если эта вариация равна нулю, то само V есть в общем максимум или минимум.

5. Проиллюстрируем сначала применение уравнения (1) на простом примере. Если все точки приложения сил *независимы* друг от друга, то задачи, собственно говоря, *нет никакой*. Каждая точка находится тогда в равновесии только в том случае, если действующие на нее силы, а следовательно, и составляющие их, равны нулю. Все δx, δy, δz тогда совершенно произвольны, и уравнение (1) имеет, следовательно, общее значение только тогда, когда коэффициенты всех δx, δy, δz равны нулю.

Но если между координатами отдельных точек существуют *уравнения*, т. е. если точки не могут перемещаться независимо друг от друга, то эти уравнения имеют форму $F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots) = 0$ или

короче $F = 0$. Тогда между перемещениями существуют уравнения следующей формы

$$\frac{dF}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dF}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dF}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dF}{dx_2}\delta x_2 + \cdots = 0.$$

Такое уравнение можно коротко обозначить так: $DF = 0$. В случае системы из n точек им соответствуют $3n$ координат и уравнение (1) содержит $3n$ величин δx, δy, δz, $\ldots$. Если же между координатами существует m уравнений формы $F = 0$, то тем самым дано m уравнений $DF = 0$ между вариациями δx, δy, δz, $\ldots$. С помощью их могут быть m вариаций выражены через остальные и вставлены в уравнение (1). Остаются, следовательно, в уравнении (1) $3n - m$ произвольных перемещений, коэффициенты которых принимаются равными нулю. Мы получаем таким образом $3n - m$ уравнений между силами и координатами, к которым прибавляются m уравнений ($F = 0$). Всего, следовательно, мы имеем $3n$ уравнений, достаточных для определения $3n$ координат положения равновесия, если даны силы и *отыскивается форма* равновесия системы.

Если же, наоборот, дана форма системы и отыскиваются силы, сохраняющие систему в равновесии, то задача остается неопределенной. Для определения $3n$ составляющих сил можно тогда применить только $3n - m$ уравнений, так как в m уравнениях ($F = 0$) составляющие силы совсем не содержатся.

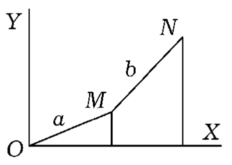


Рис. 229

Для примера возьмем рычаг $OM = a$, способный вращаться около начала координат в плоскости XY; около его конечной точки M находится другой подвижной рычаг $MN = b$. В точках M и N, координаты которых пусть будут x, y и x_1, y_1, действуют силы X, Y и X_1, Y_1.

Уравнение (1) имеет здесь следующую форму

$$X\,\delta x + X_1\,\delta x_1 + Y\,\delta y + Y_1\,\delta y_1 = 0. \tag{3}$$

Уравнений формы $F = 0$ мы имеем в данном случае два, а именно

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 = 0 \\ (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - b^2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнения формы $DF = 0$ будут

$$\begin{cases} x\delta x + y\delta y = 0 \\ (x_1 - x)\,\delta x_1 - (x_1 - x)\,\delta x - (y_1 - y)\,\delta y_1 - (y_1 - y)\,\delta y = 0. \end{cases} \tag{5}$$

В нашем случае мы можем две вариации из уравнений (5) выразить через остальные и вставить в уравнение (3). И для исключения величин из уравнений Лагранж пользовался совершенно одинаковым систематическим методом, который может быть осуществлен совершенно механически без дальнейших размышлений. Воспользуемся и мы здесь этим методом. Заключается он в том, что каждое из уравнений (5) помножается на неопределенные еще коэффициенты λ, μ и прибавляется к (3). Мы получаем тогда

$$\begin{cases} [X+\lambda x-\mu(x_1-x)]\,\delta x+[X_1+\mu(x_1-x)]\,\delta x_1=0 \\ [Y+\lambda y-\mu(y_1-y)]\,\delta y+[Y_1+\mu(y_1-y)]\,\delta y_1=0. \end{cases}$$

Коэффициенты четырех перемещений можно теперь прямо принять равными нулю. Ибо два перемещения произвольны, а оба других коэффициента могут быть приравнены нулю свободным еще выбором величин λ, μ, что равносильно исключению обоих последних перемещений.

Мы имеем, следовательно, следующие четыре уравнения

$$\begin{cases} X+\lambda x-\mu(x_1-x)=0 \\ X_1+\mu(x_1-x)=0 \\ Y+\lambda y-\mu(y_1-y)=0 \\ Y_1+\mu(y_1-y)=0 \end{cases} \tag{6}$$

Допустим сначала, что *координаты* нам *даны*, и будем отыскивать сохраняющие равновесие *силы*. Обе величины для λ и μ, естественно, определяются исключением двух коэффициентов. Таким образом, из второго и четвертого уравнения следует

$$\mu=\frac{-X_1}{x_1-x},\quad \mu=\frac{-Y_1}{y_1-y}.$$

Следовательно,

$$\frac{X_1}{Y_1}=\frac{x_1-x}{y_1-y}, \tag{7}$$

т. е. вся сила, приложенная в точке N, имеет направление MN. Из первого и третьего уравнения мы получаем

$$\lambda=\frac{-X+\mu(x_1-x)}{x},\quad \lambda=\frac{-Y+\mu(y_1-y)}{y}$$

и, следовательно, после простого сокращения

$$\frac{X + X_1}{Y + Y_1} = \frac{x}{y}. \tag{8}$$

Таким образом, равнодействующая сил, приложенных в точках M и N, имеет направление OM[1].

Итак, *четыре* составляющие силы зависят только от *двух* условий (7) и (8). Задача, следовательно, неопределенная, что вполне естественно, так как важны не абсолютные величины составляющих сил, а только *условия* сил.

Если будем рассматривать *силы*, как данные, и будем отыскивать четыре *координаты*, то мы вполне таким же образом можем обсуждать уравнения (6). Но к ним присоединяются еще уравнения (4). Мы имеем, следовательно, после устранения μ и λ уравнения (7), (8) и оба уравнения (4). Отсюда легко получаем

$$x = \frac{a(X + X_1)}{\sqrt{(X + X_1)^2 + (Y + Y_1)^2}},$$

$$y = \frac{a(Y + Y_1)}{\sqrt{(X + X_1)^2 + (Y + Y_1)^2}},$$

$$x_1 = \frac{a(X + X_1)}{\sqrt{(X + X_1)^2 + (Y + Y_1)^2}} + \frac{bX_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}},$$

$$y_1 = \frac{a(Y + Y_1)}{\sqrt{(X + X_1)^2 + (Y + Y_1)^2}} + \frac{bY_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}.$$

[1] ***Механическое*** значение введения неопределенных коэффициентов λ, μ может быть объяснено следующим образом. Уравнения (6) выражают равновесие двух ***свободных*** точек, на которые кроме сил X, Y, X_1, Y_1 действуют еще силы, соответствующие остальным выражениям и исключающие именно эти составляющие силы. Точка N, например, находится в равновесии, если X_1 уничтожается ***неопределенной*** еще по величине силой $\mu(x_1 - x)$ и Y_1 уничтожается ***неопределенной*** еще по величине силой $\mu(y_1 - y)$. Но ***направление*** этой прибавочной силы, обязанной своим происхождением связи и ее замещающей, определенно. Если мы обозначим через α угол, образуемый этой силой с осью абсцисс, то мы имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu(y_1 - y)}{\mu(x_1 - x)} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},$$

т. е. направление силы, обязанной своим происхождением связи, есть направление b.

Таким образом, задача решена. Как ни прост этот пример, он все же достаточен, чтобы ясно показать характер и смысл метода Лагранжа. Механизм метода раз навсегда обдуман для всех случаев и, применяя его в каком-нибудь частном случае, почти совсем думать не приходится. Приведенный пример вместе с тем так прост, что его можно решить, только посмотрев на фигуру. Таким образом, упражняясь в этом методе, имеешь ту выгоду, что его легко контролировать.

6. Рассмотрим теперь применение уравнения (2), т.е. принципа д'Аламбера в форме Лагранжа. И здесь нет никакой задачи, если все массы независимы друг от друга. В этом случае каждая масса подчиняется соответствующим силам. Вариации δx, δy, δz, $\ldots$ тогда совершенно произвольны и каждый коэффициент принимается сам для себя равным нулю. Для движения n масс получаются, таким образом, $3n$ совместно существующих дифференциальных уравнений.

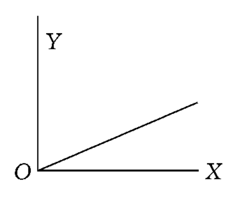


Рис. 230

Но если между координатами существуют обуславливающие уравнения ($F = 0$), то эти уравнения приводят к другим уравнениям ($DF = 0$) между перемещениями или вариациями. С последними поступают совершенно так, как при применении уравнения (1). Следует только заметить, что уравнения ($F = 0$) в конце концов приходится применять в недифференцированной и дифференцированной формах, что станет ясно из следующих примеров.

Пусть тяжелая точка массы m находится на вертикальной плоскости (XY) и может двигаться по наклоненной к горизонту прямой $y = ax$. Уравнение (2) здесь будет

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0$$

и, так как $X = 0$, $Y = -mg$,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0. \tag{9}$$

Вместо $F = 0$ мы здесь имеем

$$y = ax \tag{10}$$

и для $DF = 0$ мы получаем

$$\delta y = a\delta x.$$

Так как δy выпадает и δx остается произвольным, то уравнение (9) получает следующую форму

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right) a = 0.$$

Дифференцируя уравнение (10) ($F = 0$), получаем

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{d^2x}{dt^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\left(g + a\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0. \tag{11}$$

Интегрируя уравнение (11), получаем

$$x = \frac{-a}{1+a^2} g \frac{t^2}{2} + bt + c$$

и

$$y = \frac{-a^2}{1+a^2} g \frac{t^2}{2} + abt + ac.$$

Здесь b и c суть постоянные интегрирования, определяющиеся начальным положением и начальной скоростью точки m. Этот результат легко получить и прямо.

Некоторая осторожность необходима при применении уравнения (1), когда $F = 0$ содержит время. Объясним применение метода в данном случае на примере. Рассмотрим еще раз предыдущий случай, но примем, что прямая движется вертикально вверх с ускорением γ. Мы снова исходим из уравнения (9)

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0.$$

Вместо $F = 0$ мы здесь имеем

$$y = ax + \gamma\frac{t^2}{2}. \qquad (12)$$

Чтобы образовать $DF = 0$, мы варьируем уравнение (12) только по x и y, ибо дело идет здесь только о *возможном* перемещении при *мгновенно данной* форме системы, а вовсе не о перемещении, которое *действительно* происходит во времени. Мы принимаем, следовательно, как раньше

$$\delta y = a\delta x$$

и как раньше получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \left(g - \frac{d^2y}{dt^2}\right)a = 0. \qquad (13)$$

Чтобы получить однако уравнение только с x без y, мы поступаем следующим образом. Так как в уравнении (13) x и y связаны между собою *действительным* движением, то мы дифференцируем уравнение (12) по t и это отношение

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma$$

подставляем в уравнение (13), откуда получается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(g + \gamma + a\frac{d^2x}{dt^2}\right)a = 0.$$

Интегрируя это последнее уравнение, мы получаем

$$x = \frac{-a}{1+a^2}(g+\gamma)\frac{t^2}{2} + bt + c;$$

$$y = \left[\gamma - \frac{a^2}{1+a^2}(g+\gamma)\right]\frac{t^2}{2} + abt + ac.$$

Если на движущейся прямой лежит не имеющее тяжести тело m, то мы получаем следующие уравнения

$$x = \frac{-a}{1+a^2}\gamma\frac{t^2}{2} + bt + c;$$

$$y = \frac{\gamma}{1+a^2}\frac{t^2}{2} + abt + ac.$$

Уравнения эти получить нетрудно, если принять в соображение, что тело на прямой, двигающейся вверх с ускорением γ, находится в таком положении, как будто оно имело бы на неподвижной прямой ускорение γ, направленное вниз.

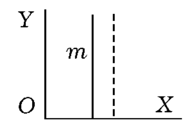


Рис. 231

7. Чтобы еще больше выяснить себе нашу операцию с уравнением (12) в предыдущем примере, мы должны принять в соображение следующее. Уравнение (2), принцип д'Аламбера, выражает, что при каком-нибудь перемещении вся *возможная* работа имеет своим источником не связи, а приложенные силы. Но это верно только до тех пор, покуда не принимаются во внимание изменения связей во *времени*. Если же связи изменяются с временем, то тоже совершается работа, и к перемещениям, действительно происходящим во времени, можно применить уравнение (2) только в том случае, если к приложенным силам *причисляют* и те силы, которые вызывают изменение связей.

Пусть тяжелая масса m движется по прямой, параллельной к OY. Пусть уравнение этой прямой, положение которой изменяется во времени, будет

$$x = \gamma\frac{t^2}{2}, \quad (F = 0). \tag{14}$$

Принцип д'Аламбера снова дает нам уравнение (9), но, так как из $DF = 0$ следует $\delta x = 0$, то это уравнение получает форму

$$\left(g + \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0, \tag{15}$$

где δy совершенно произвольно. Отсюда следует

$$g + \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

и

$$y = \frac{-gt^2}{2} + at + b$$

и сюда прибавляется еще уравнение (14), т. е.

$$x = \gamma\frac{t^2}{2}.$$

Очевидно, что уравнение (15) выражает не всю работу, совершенную при перемещении, *действительно* происходящем во времени, а только работу, совершенную при *возможном* перемещении на прямой, которая мыслится на момент неподвижной.

Представим себе прямую лишенной массы и перемещающейся параллельно себе самой в определенном направлении под действием силы $m\gamma$. Вместо уравнения (2) мы здесь имеем

$$\left(m\gamma - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(-mg - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y = 0.$$

А так как δx, δy здесь совершенно произвольны, то мы получаем следующие два уравнения, дающие тот же результат, что и раньше:

$$\gamma - \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$g + \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Различное как будто решение таких случаев объясняется маленькой непоследовательностью, происходящей оттого, что ради удобства вычисления не принимаются в соображение сейчас же *все* существующие силы, а часть их принимается в соображение лишь *впоследствии.*

8. Так как различные принципы механики выражают только различные стороны одного и того же факта, то нетрудно вывести один принцип из другого. Иллюстрируем это на примере, для чего попытаемся развить принцип живых сил из уравнения (2) на стр. 398. Уравнение это относится к мгновенно возможным (виртуальным) перемещениям. Если связи не зависят от времени, то и действительно наступающие движения суть тоже виртуальные перемещения. Наш принцип, следовательно, применим и к ним. Мы можем тогда вместо δx, δy, δz писать также dx, dy, dz, обозначающие перемещения, которые действительно происходят во времени, и мы пишем:

$$\sum(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz\right).$$

Вместо второй половины уравнения можно писать также:

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}dt+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}dt+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}d\sum m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{2}d\sum mv^2,$$

для чего для dx вводят $\frac{dx}{dt}dt$ и т. д., что можно сделать и в первой половине уравнения, а через v обозначают скорость. Отсюда получают:

$$\int\sum(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\sum\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2),$$

где v_0 означает начальную и v конечную скорость движения. Интеграл первой половины уравнения легко всегда найти, если есть возможность свести его к переменной величине, т. е. если известен ход движения во времени или по крайней мере, путь, проходимый движущимися точками. Это сведение однако не нужно, если X, Y, Z суть частные производные одной и той же функции U координат, т. е. если:

$$X=\frac{dU}{dx},\quad Y=\frac{dU}{dy},\quad Z=\frac{dU}{dz},$$

как это бывает всегда, когда налицо только, так называемые, центральные силы. Тогда все выражение первой половины уравнения есть полный дифференциал. Мы имеем тогда:

$$\sum(U-U_0)=\sum\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2),$$

т. е. разность силовых функций (работ) в начале и в конце движения равна разности живых сил в начале и в конце движения. Живые силы суть тогда тоже функции координат.

Пусть, например, для тела, движущегося в плоскости XY, дано: $X=-y$, $Y=-x$. Мы имеем тогда:

$$\int(-y\,dx-x\,dy)=-\int d(xy)=x_0y_0-xy=\frac{1}{2}(v^2-v_0^2).$$

Но если $X=-a$, $Y=-x$, то интеграл первой половины уравнения будет $-\int(a\,dx+x\,dy)$. Этот интеграл можно получить, если известен

путь, который совершило тело, т. е. если y дано как функция от x. Если бы, например, было дано, что $y = px^2$, то мы имели бы интеграл:

$$-\int (a + 2px^2)\,dx = a(x_0 - x) + \frac{2p(x_0^3 - x^3)}{3}.$$

Разница между обоими случаями заключается в том, что в *первом* случае работа есть исключительно функция координат, что здесь существует силовая функция, что элемент работы есть полный дифференциал, так что работа *дана* через *начальные* и *конечные* значения координат, между тем как во *втором* случае она зависит от всего пути.

9. Приведенных здесь простых примеров, не представляющих никаких затруднений, достаточно, мне кажется, чтобы понять смысл операций аналитической механики. Новых *принципиальных* разъяснений относительно природы механических процессов от аналитической механики ожидать нельзя. Напротив того, принципиальное познание должно быть в существе своем закончено прежде, чем приступают к построению аналитической механики, ставящей себе целью лишь самое простое практическое *решение* задач. Кто упустил бы из виду это обстоятельство, для того оставалась бы непонятой великая работа Лагранжа, имеющая и здесь по существу своему значение *экономическое*. От этой ошибки нельзя признать совершенно свободным Пуансо.

10. Следует еще упомянуть, что Мебиус, Гамильтон, Грассманн и др. положили начало новому видоизменению формы механики. Они развили математические понятия, точнее и более непосредственно примыкающие к представлениям геометрическим, чем понятия обыкновенной аналитической геометрии, чем были объединены преимущества аналитической всеобщности с преимуществами геометрической наглядности. Этот процесс развития механики лежит еще, конечно, вне пределов исторического изложения.

Книга Грассманна «Учение о протяженности» («Ausdehnungslehre») вышла в свет в 1844 году. В ней Грассманн впервые излагает свои идеи. Книга эта во многих отношениях книга удивительная. Во введении мы находим ценные теоретико-познавательные замечания. Учение о протяженности развивается здесь, как более общая наука, частным трехмерным случаем которой является наша геометрия, и по этому поводу подвергаются критике основы этой последней. Новые и плодотворные понятия суммы расстояний, произведения расстояний и др. оказываются применимыми и к механике. Подвергает Грассманн критике и прин-

ципы Ньютона и полагает, что он может их все свести к *одному* выражению: «вся сила (или все движение), присущая в какое-нибудь время соединению материальных частичек, есть сумма из всей силы (или всего движения), которая была ему присуща в какое-нибудь прежнее время, и всех сил, сообщенных ему с тех пор извне; это происходит тогда, когда все силы рассматриваются, как расстояния постоянного направления и постоянной длины и относятся к точкам равной массы». Под силой Грассманн здесь разумеет сообщенную и неразрушимую скорость. Все воззрение его весьма близко воззрению Герца. Силы (скорости) изображаются, как расстояния, моменты — как поверхности определенного направления и т. д., благодаря чему каждый вывод становится очень наглядным и кратким. Главное же преимущество Грассманн усматривает в том, что всякий шаг в вычислении есть вместе с тем чистое выражение абстрактного развития понятий, между тем как при обычном методе это последнее развитие введением трех произвольных координат отодвигается на задний план. Различие между аналитическим и синтетическим методом снова устраняется и преимущества того и другого объединяются. Некоторое представление об этих преимуществах может дать родственный метод Гамильтона, наглядно изложенный при помощи примера на стр. 135.

4. Экономия науки

1. Задача всей и всякой науки — замещение опыта или *экономия* его воспроизведением и предвосхищением (Vorbildung) фактов в наших мыслях. Опыт, воспроизведенный в наших мыслях, легче под рукой, чем действительный опыт, и в некоторых отношениях может этот последний заменить. Эта *экономическая* функция науки, пронизывающая все ее существо, ясна уже из самых общих рассуждений. С познанием экономического характера науки исчезает из нее также всякая мистика. Сообщение науки при помощи преподавания имеет дело сэкономить для индивидуума опыт сообщением ему опыта другого индивидуума. Более того, опыт целых поколений сохраняется в виде письменных памятников в библиотеках и усваивается таким образом дальнейшими поколениями, благодаря чему повторение его этими последними становится ненужным. Само собой разумеется, что и средство сообщения, наша речь, тоже есть институт экономический. Данные опыта разлагаются более или менее совершенно на более простые, чаще встреча-

ющиеся элементы и в целях сообщения, всегда с некоторым ущербом в точности, *символизируются.* Эта символизация в устной речи является еще сплошь чисто национальной и таковой надолго еще останется. Письменная же речь постепенно приближается к идеалу интернационального универсального письма, ибо она перестала быть чисто фонетическим письмом. Численные знаки, алгебраические и математические знаки вообще, знаки химические, музыкальное нотное письмо, фонетическое письмо (Брюкке) — все это приходится рассматривать уже как части будущего универсального письма, имеющие уже отчасти весьма абстрактный характер и почти совсем интернациональные. Анализ цветов тоже настолько подвинулся уже вперед физически и физиологически, что недвусмысленное интернациональное обозначение цветов и цветовых ощущений не представляет более никаких принципиальных затруднений. Наконец, в китайских письменах мы имеем действительное письмо отвлеченных понятий, различными народами фонетически читаемое совершенно различно, но всеми понимаемое в одном и том же смысле. Более простая система знаков могла бы превратить это письмо в универсальное. Введению такого письма должно предшествовать устранение всего традиционного и исторически случайного из грамматики и ограничение форм самым необходимым, как это почти уже достигнуто в английском языке. Преимущества такого письма заключались бы не только в его всеобщности. *Чтение* подобного рода письма ничем не отличалось бы от *понимания* его. Наши дети часто читают то, чего они не понимают. Китаец может читать только то, что он понимает.

2. Когда мы воспроизводим факты в наших мыслях, то мы никогда не воспроизводим фактов *вообще*, а всегда воспроизводим их только с той стороны, которая для нас *важна.* Мы имеем при этом всегда перед собою цель, выросшую непосредственно из какого-нибудь практического интереса. Наши воспроизведения суть всегда абстракции. И в этом находит свое выражение черта экономическая.

Природа слагается из элементов, данных нам через посредство наших чувств. Человек первобытный вырывает сначала отсюда известные комплексы элементов, выступающие с относительной устойчивостью и имеющие для него более важное значение. Первые и самые древние слова суть названия для «вещей». Уже в этом заключается абстракция от среды, окружающей эти вещи, от непрестанных мелких изменений, которые испытывают эти комплексы и которые, как менее важ-

ные, не принимаются во внимание. В природе нет вещи постоянной, неизменяющейся. Вещь есть абстракция, название, символ для какого-нибудь *комплекса* элементов, изменение которого мы не принимаем во внимание. Если мы весь комплекс обозначаем *одним* словом, *одним* символом, то это происходит потому, что у нас есть потребность все связанные между собою впечатления пробуждать сразу. Когда же на более высокой ступени культуры эти изменения обращают на себя наше внимание, то мы естественно не можем вместе с тем удержать и постоянство вещи, если мы не хотим прийти к «вещи в себе» и подобным противоречивым представлениям. Ощущения тоже не «символы вещей». Скорее «вещь» есть мыслимый символ для комплекса ощущений относительной устойчивости. Не вещи (тела), а цвета, тоны, давления, пространства, времена (что мы обыкновенно называем ощущениями) суть настоящие *элементы* мира.

Смысл всего процесса исключительно экономический. При воспроизведении фактов мы начинаем с более устойчивых, привычных и знакомых нам комплексов и сюда впоследствии прибавляем, внося поправки, и непривычное. Когда мы, например, говорим о пробуравленном цилиндре, о кубе с притупленными краями, то это — строго говоря — собственно противоречие, если только мы не принимаем приведенной выше точки зрения. Все *суждения* суть подобного рода дополнения и поправки существующих уже представлений.

3. Когда мы говорим о причине и следствии, то мы произвольно выделяем те моменты, на связь между которыми нужно *обратить внимание* при воспроизведении какого-нибудь факта в важном для нас направлении. В природе нет причины и нет следствия. Природа нам только *раз* дана. Повторения равных случаев, в которых A было бы всегда связано с B, т. е. равные результаты при равных условиях, т. е. сущность связи между причиной и следствием, существуют только в абстракции, которую мы предпринимаем в целях воспроизведения фактов. Раз какой-нибудь факт стал нам привычен и знаком, мы не нуждаемся больше в этом выделении связанных между собою признаков, мы не обращаем более внимание на новое, особенно бросающееся в глаза, мы не говорим более о причине и следствии. Теплота есть причина упругости пара. Раз это отношение нам стало привычно, мы представляем себе пар прямо вместе с упругостью, соответствующей его температуре. Кислота есть причина окраски в красный цвет лакмусовой настойки. Впоследствии же эта окраска есть одно из свойств кислоты.

Юм первый задался вопросом: как может вещь A действовать на другую вещь B? Он тоже не признает причинности, а только последовательность во времени, ставшую нам привычной и *знакомой*. Кант правильно познал, что не одно голое наблюдение может научить нас *необходимости* связи между A и B. Он принимает прирожденное рассудочное понятие, под которое он подводит случай, данный в опыте. Шопенгауэр, стоящий по существу на той же точке зрения, различает четыре формы «закона достаточного основания»: логическую, физическую, математическую форму и закон мотивации. Но эти формы различаются только по *материалу*, к которому они применяются и который принадлежит отчасти *внешнему* и отчасти *внутреннему* опыту.

Наивное и естественное объяснение сводится, по-видимому, к следующему. Понятия причины и следствия возникают лишь вследствие стремления воспроизводить факты. Сначала возникает только привычка связывать A с B, C с D, E с F и т. д. Наблюдая, когда есть уже много опыта, какую-нибудь связь между M и N, часто узнают, что M *состоит* из A, C, E, а N — из B, D, F, связь между которыми нам уже *знакома и привычна* и которая имеет для нас высший авторитет. Этим объясняется то, что человек *опытный* рассматривает каждый новый опыт другими глазами, чем новичок. Новый опыт противопоставляется всему старому. Таким образом, в действительности есть «рассудочное понятие», под которое подводится каждый новый опыт, но это понятие развилось в самом опыте. Представление о *необходимости* связи между причиной и следствием образуется, вероятно, через наше *произвольное* движение и изменения, вызываемые нами посредственно через это движение. Это положение между прочим принял Юм, но сам не остался ему верным. Важно для авторитета понятий причины и следствия то, что они развились *инстинктивно* и непроизвольно, что мы ясно чувствуем, что сами мы лично ничего не сделали для их образования. Более того, мы можем даже сказать, что чувство причинности не приобретено индивидуумом, а преобразовано уже развитием рода. Таким образом, причина и следствие суть создания нашего мышления с функцией экономической. На вопрос, *почему* они возникают, никакого ответа дать нельзя. Ибо именно через абстракцию всего однородного мы приходим лишь к вопросу *«почему»*.

4. Если мы остановимся на отдельных частностях науки, то экономический характер ее станет еще яснее. Так называемые, описательные науки должны удовлетвориться воспроизведением отдельных фактов.

Там, где это возможно, раз навсегда выдвигается общее нескольких фактов. В науках высокоразвитых удается объединить в *одном* выражении указания на воспроизведение очень многих фактов. Вместо того, например, чтобы отмечать все различные случаи преломления света в отдельности, мы можем все встречающиеся случаи воспроизводить или до опыта представить себе, если мы знаем, что луч падающий и переломленный лежат в одной плоскости с перпендикуляром и что $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Вместо бесчисленного множества случаев преломления света при различных комбинациях веществ и углах падения, нам нужно тогда отметить себе только это указание и значения для n, что гораздо легче. Экономическая тенденция здесь очевидна. Далее, в природе нет *закона* преломления, а есть только различные случаи преломления. Закон преломления есть лишь обобщенное концентрированное указание для воспроизведения для *нас* факта и притом *только* с его геометрической стороны.

5. Наиболее развиты со стороны экономической науки, факты которых могут быть разложены на немногие только однородные и поддающиеся учету элементы, как, например, механика, в которой мы имеем дело только с пространствами, временами и массами. Вся предвосхищающая опыт экономия математики оказывается на пользу этим наукам. Математика есть экономия счета. Числа суть порядковые знаки, приведенные в простую систему ради удобств обозрения и экономии. Численные операции познаются в своей независимости от рода объектов и раз навсегда заучиваются. Если я к 5 однородным объектам прибавляю 7, то для определения суммы я сначала еще раз сосчитываю все объекты и тогда замечаю, что я прямо могу считать от 5 дальше. При многократном повторении таких случаев я совсем сберегаю себе счет и предвосхищаю известный мне уже *результат* счета.

Все численные операции имеют целью *сэкономить* прямой счет и заменить его результатами предпринятых уже раньше операций счета. Мы не желаем одну и ту же операцию счета повторять чаще, чем это необходимо. Уже в четырех правилах арифметики можно найти многочисленные доказательства правильности этого взгляда. Но та же тенденция ведет и к алгебре, в которой раз навсегда излагаются *равные по форме* численные операции, поскольку они могут быть выполнены независимо от значений чисел.

Из уравнения

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y,$$

например, мы узнаем, что более сложная численная операция слева всегда может быть заменена более простой справа, какие бы числа ни подставить под знаками x и y. Этим мы сберегаем себе труд выполнения более сложной операции в будущем. Математика есть метод замены, насколько это возможно, и в *самой экономной* форме *новых* численных операций выполненными уже раньше и, следовательно, не подлежащими повторению. При этом может случиться, что применяются результаты операций, в действительности выполненных много столетий тому назад.

Более напряженные умственные операции часто могут быть с пользой заменены механическими умственными операциями. Теория определителей, например, обязана своим происхождением наблюдению, что нет нужды каждый раз сызнова решать уравнения формы

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

из которых следует

$$x = -\frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = -\frac{P}{N}$$
$$y = -\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = -\frac{Q}{N}.$$

Решение это может быть получено из коэффициентов, если написать эти последние по известной схеме и *механически* ими оперировать. Мы имеем тогда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = N$$

и аналогично

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = p, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = Q.$$

При математических операциях можно даже *совершенно* освободить голову от работы, *символизируя* раз выполненные численные операции при помощи механических операций со знаками и сберегая работу ума для более важного вместо того, чтобы растрачивать ее на повторение выполненных уже операций. Подобным же образом поступает экономно и купец, который вместо того, чтобы рассылать сами

товары, оперирует ордерами на них. Ручная работа счетчика может быть даже заменена счетными машинами. Таких машин, как известно, имеется уже несколько. Математику Баббэджу, построившему такого рода машину, изложенные здесь мысли были уже совершенно ясны.

Не всегда результат счета должен быть найден *действительным* счетом, а он может быть найден и косвенно. Легко, например, найти, что кривая, квадратура которой для абсциссы x имеет величину x^m, дает приращение $mx^{m-1}\,dx$ квадратуры для приращения абсциссы dx. Тогда известно также, что $\int mx^{m-1}\,dx = x^m$, т. е. можно узнать, что приращению $mx^{m-1}\,dx$ соответствует величина x^m, как узнают плод по его кожице. Такие результаты, случайно найденные методом обратных рассуждений, представляют в математике нередкое явление.

Может показаться странным, что давно совершенная научная работа может многократно применяться, чего при механической работе, естественно, не бывает. Если кто-нибудь, совершающий ежедневно один и тот же путь, однажды случайно находит путь более короткий и постоянно выбирает этот последний, вспоминая о краткости его, он, конечно, сберегает разность в труде. Но воспоминание не есть настоящая работа, а *освобождение* работы более целесообразной. Именно так дело происходит с применением научных идей.

Кто занимается математикой, не добившись ясности понимания в указанном направлении, тот часто не может отделаться от неприятного впечатления, будто бумага и карандаш превосходят в интеллекте его самого. Преподавание математики в этой форме вряд ли имеет более образовательное значение, чем занятие каббалой или магическим квадратом. Это не может не привести к зарождению мистической склонности, которая может принести свои плоды.

6. Вот подобного же рода примеры экономии мысли мы можем найти и в физике. Нам достаточно будет краткого указания. Момент инерции делает излишним для нас рассмотрение отдельных частей массы. С помощью силовой функции мы сберегаем себе исследование отдельных составляющих сил. Простота рассуждений с помощью силовой функции основана на том, что отысканию свойств этой последней должно предшествовать множество рассуждений. Диоптрика Гаусса сберегает нам рассмотрение отдельных преломляющих поверхностей диоптрической системы, заменяя их главными точками и фокусами. Но открытию последних должно было предшествовать рассмотрение отдельных поверхностей. Диоптрика Гаусса *сберегает* только постоянное *повторение* этого рассмотрения.

Таким образом, нет, можно сказать, вовсе такого научного результата, который принципиально не мог бы быть найден и без всякого метода. В действительности же в течение короткого времени одной человеческой жизни и ввиду ограниченной памяти человека более или менее значительное знание достижимо только при *величайшей* экономии мысли. Поэтому сама наука может рассматриваться как задача на минимум, состоящая в том, чтобы возможно полнее изобразить факты с *наименьшей затратой работы мышления.*

7. С нашей точки зрения функция всякой науки замещать опыт. Поэтому она, с одной стороны, правда, должна оставаться в *области* опыта, но, с другой стороны, она и предшествует опыту, всегда ожидая подтверждения или также опровержения. Там, где невозможно ни подтверждение, ни опровержение, там науке делать нечего. Она остается всегда только в области *неполного* опыта. Образцами таких отраслей науки служат теории упругости и теплопроводности: и та, и другая приписывают мельчайшим частицам тел только те самые свойства, с которыми нас знакомит непосредственное наблюдение больших частей. С развитием средств наблюдения сравнение между теорией и опытом может быть проведено все дальше и дальше.

Один опыт, без сопутствующих ему мыслей, оставался бы всегда нам чуждым. Те мысли, которые могут быть сохранены в *наибольшей* области и наиболее обильным образом дополняют опыт, суть также мысли *наиболее научные.* В исследовании исходят из принципа *непрерывности*, потому что, *только* исходя из этого принципа, можно достичь полезного и экономного понимания опыта.

8. Если зажать с концов длинный упругий стержень, то в этом последнем могут быть вызваны медленные непосредственно наблюдаемые колебания. Эти колебания можно видеть, осязать, записать графически и т.д. Если укоротить стержень, колебания становятся быстрее и не могут быть уже непосредственно видны; стержень дает неясную картину — новое явление. Но ощущение осязательное похоже еще на прежнее, движения стержня могут еще быть графически записаны и, если мы удерживаем еще *представление* колебаний, мы предвидим результаты наших опытов. При дальнейшем укорочении стержня изменяется также и осязательное ощущение, стержень к тому же начинает звучать, т. е. мы имеем еще одно новое явление. Но так как не все явления *сразу* совершенно изменяются, а изменяется всегда только то или другое из них, то *сопутствующая* идея колебания, не связанная с одним

каким-нибудь колебанием в отдельности, все еще остается *полезной*, все еще экономна. Даже тогда, когда тон становится столь высоким и колебания столь малыми, что упомянутые средства наблюдения предыдущих случаев оказываются негодными, мы все еще *с пользой* представляем себе звучащий стержень в колебательном движении и мы можем предсказать колебания темных полос в спектре поляризованного света в стеклянном стержне. Если бы с дальнейшим укорочением стержня *все* явления внезапно перешли в новые представления, колебание *не приносило бы* больше пользы, так как оно не давало бы больше средств для *дополнения* новых данных опыта прежними.

Если мы к воспринимаемым нами действиям людей присоединяем в нашем мышлении не поддающиеся нашему восприятию ощущения и мысли их, подобные нашим, то это представление имеет экономическую ценность, делая понятным нам, т. е. дополняя и сберегая наш опыт. Это представление только потому не рассматривается, как великое научное открытие, что оно с большой силой навязывается человеку, так что каждый ребенок его находит. Подобным же образом мы поступаем, когда мы движущееся тело, исчезнувшее за колонной, или комету, в данный момент невидимую, представляем себе продолжающими свой путь со всеми наблюденными до тех пор свойствами, и тогда мы не поражены их новым появлением. Мы заполняем пробелы опыта представлениями, которые именно опыт дал нам.

9. Не всякая существующая научная теория получается столь естественно и *безыскусственно*. Когда мы, например, объясняем химические, электрические, оптические явления при помощи атомов, то это вспомогательное представление атомов не получилось на основании принципа непрерывности, а скорее именно для этой цели придумано. Атомов мы нигде воспринять не можем; подобно всем субстанциям, они — вещи мыслимые. Более того, атомам приписываются даже некоторые свойства, находящиеся в противоречии со всеми наблюденными нами до сих пор свойствами. Как бы атомные теории ни были пригодны для того, чтобы изобразить ряд фактов, естествоиспытатель, который блюдет правила философствования Ньютона, будет рассматривать эти теории только, как вспомогательное средство *временного характера* и будет стремиться к замене их каким-нибудь более естественным воззрением.

Атомная теория имеет в физике подобную же функцию, какую имеют известные математические вспомогательные представления:

она есть математическая *модель* для изображения фактов. Если мы и выражаем колебания через формулы синусоидальных колебаний, процессы охлаждения — через показатели, расстояния, пройденные падающим телом, — через квадраты времени, то никому и в голову не приходит, что есть какая-нибудь связь между колебанием *в себе* и какой-нибудь функцией угла или круга, между падением *в себе* и возведением в квадрат. Было замечено только, что между наблюденными величинами существуют подобные же отношения, какие существуют между известными, *привычными и знакомыми* нам функциями, и мы пользуемся *этими более привычными и знакомыми нам* представлениями ввиду удобства для дополнения нашего опыта. Явления природы, отношения между которыми не похожи на привычные нам функции, в настоящее время очень трудно изобразить. Это может стать иначе с дальнейшим развитием математики. В качестве таких математических вспомогательных представлений могут быть также полезны пространства более трех измерений, что я разобрал уже в другом месте. Нет поэтому нужды рассматривать такие пространства, как нечто большее, чем мыслимые вещи[1].

---

[1]Стараниями Лобачевского, Bolyai, Гаусса, Римана проложил себе, как известно, путь тот взгляд, что то, что мы называем *пространством*, есть *специальный действительный* случай *более общего мыслимого* случая многообразия большого количества измерений. Пространство нашего зрения и осязания есть *тройное* многообразие, оно имеет три измерения, каждое место в нем может быть определено тремя независимыми друг от друга признаками. *Мыслимо* же четвертое или еще более многократное, подобное пространству, многообразие. Да и род многообразия *мыслим* иначе, чем он есть в данном пространстве. Это разъяснение является заслугой главным образом Римана, и мы считаем его весьма важным. Свойства данного пространства тотчас же представляются нам, как объекты *опыта*, и отпадают все геометрические псевдотеории, ставящие себе целью установить их одним философствованием.

Существу, которое жило бы в шаровой поверхности и не имело бы для сравнения никакого другого пространства, его собственное пространство казалось бы везде с равными свойствами. Оно могло бы считать его бесконечным и только опыт убедил бы его в противоположном. Передвигаясь из двух точек наибольшего круга перпендикулярно к этому последнему тоже по наибольшим кругам, это существо едва ли подозревало бы, что круги эти где-либо пересекаются. Так и относительно данного нам пространства только *опыт* может научить, конечно ли оно, пересекаются ли в нем параллельные линии и т. д. Трудно переоценить все высокое значение этого разъяснения. Разъяснение, созданное трудами Римана в науке, подобно лишь тому разъяснению, которое сознание обыкновенного человека нашло по вопросу о земной поверхности в открытиях первых кругосветных путешественников.

Теоретическое исследование упомянутых математических возможностей прежде всего не имеет ничего общего с вопросом, соответствуют ли им какие-нибудь реаль-

И так обстоит дело со всеми гипотезами, привлекаемыми для объяснения новых явлений. Наши мысли об электрических процессах находятся с ними в полном согласии, развиваясь почти сами по себе в привычном направлении, как только заметим, что все происходит так, как будто бы на поверхности проводника находились притягивающиеся и отталкивающиеся жидкости. Но сами эти вспомогательные представления с явлением в *себе* самом ничего общего не имеют.

10. Представление об экономии нашего мышления развилось у меня с опытом преподавателя, в практике преподавания. Оно было у меня уже, когда я приступил к своим лекциям в 1861 году в качестве

ности. Поэтому не следует также названных математиков считать ответственными за те чудовищные идеи, которым эти исследования послужили исходным началом. Пространство нашего зрения и осязания трехмерно, в этом никто никогда не сомневался. Если бы из этого пространства исчезали тела или в него попадали новые, то было бы возможно научно обсуждать вопрос, представляет ли облегчение для понимания и обзора, если представлять себе данное пространство, как часть четырех — или многомерного пространства. Таким образом, это четвертое измерение все же оставалось бы всегда еще вещью мыслимой.

Но так дело не обстоит. Подобного рода явления появились лишь *после* того, как стали известны новые воззрения, в присутствии известных лиц в спиритических обществах. Некоторым теологам, затруднявшимся совершенно уничтожить ад, да и спиритам четвертое измерение оказалось весьма кстати. Для спиритов польза четвертого измерения заключается в следующем. Из ограниченной линии можно попасть во вторoе измерение, не проходя через ее конечные точки, из поверхности, ограниченной кривой линией, можно попасть в третье и из замкнутого пространства в четвертое измерение, не прорываясь через границы. Даже те невинные вещи, которые проделывали фокусники в трех измерениях, получают, благодаря четвертому измерению, какой-то новый ореол. Все кунстштюки спиритов, как образование узлов в замкнутых нитях или уничтожение таких узлов, как удаление тел из замкнутых пространств, удаются только в тех случаях, где вовсе не в этом дело. Все сводится к бесполезным фокусам. Не народился еще такой акушер, который добился бы рождения через четвертое измерение. Если бы это случилось, вопрос сейчас же стал бы *серьезным*. Прекрасные фокусы с узлами профессора Симони очень хороши, как фокусы, но они свидетельствуют не в пользу, а против спиритов.

Всякий может высказывать свое мнение и приводить в пользу его свои доказательства; в этом никому отказать нельзя. Но решение вопроса о том, *стоит ли* естествоиспытателю подробно останавливаться на том или другом высказанном мнении в серьезном исследовании, должно быть предоставлено его разуму и инстинкту. Если эти вещи окажутся истинными, я не постыжусь быть последним, который этому поверит. То, что я видел, не было способно меня сделать более доверчивым.

Еще до обнародования работы Римана, я сам рассматривал уже многомерные пространства в качестве математически-физического вспомогательного средства. Но я надеюсь, что то, что я об этом думал, говорил и писал, никто не признает равноправным с какой-нибудь историей о привидениях. (См. Мах. «Принцип сохранения работы. История и корень его»).

приват-доцента и — что вполне простительно — полагал тогда, что я один обладаю им. В настоящее время я, напротив того, убежден в том, что, по меньшей мере, предчувствие этого взгляда должно было быть общим достоянием *всех* ученых исследователей, задумывавшихся вообще о процессе исследования, как *таковом*. Выражение этого взгляда может получить еще весьма различные формы. Так, основной мотив *простоты и красоты*, столь ясно выступающий у Коперника и Галилея, я признал бы не только эстетическим, но и экономическим. И в «Правилах философствования» («Regulae Philosophandi») Ньютона является существенной точка зрения экономическая, хотя экономический принцип не выражен здесь вполне ясно, как таковой. В интересной статье «Один эпизод из истории философии» («An episode in the history of philosophy», The Open Court, April 4, 1895) MacCormack показал, что в своих «Essays» Адам Смитт был очень близок к мысли об экономии науки. В новейшее время этот взгляд был высказан неоднократно, хотя и в различной форме: мной в 1871 году в лекции «О сохранении работы», Клиффордом в 1872 году в его "Lectures and essays", Кирхгоффом в 1874 году в его «Механике» и Авенариусом в 1876 году. На устное выражение политика-эконома Германна я указал уже в моей книге «Принцип сохранения работы» (прим. 5). Но обнародовал ли этот ученый какую-нибудь работу по этому вопросу, мне неизвестно.

11. Я сошлюсь здесь еще на дополнительное изложение в моих «Популярно-научных очерках» (стр. 203 и след.) и в «Учении о теплоте» (стр. 294.). В последнем сочинении рассмотрены также возражения Петцольдта («Vierteljahrsschr. f wissenschaftl», Philosophie, 1891). Недавно Husserl в первой части своего сочинения «Logische Untersuchungen» («Логические исследования») привел новые возражения против экономии мышления. На некоторые из них я ответил уже в своем ответе Петцольдту. Я полагаю поэтому, что следует подождать с более подробным ответом до тех пор, пока не будет обнародована вся работа Husserl'а, чтобы тогда лишь посмотреть, не возможно ли между нами соглашение. Покуда же я ограничусь все же лишь некоторыми замечаниями. В качестве естествоиспытателя я привык начинать исследование с специального, поддаваться действию этого последнего и отсюда переходить к более общему. Этой привычке я следовал также при исследовании развития физического познания. Я должен был поступить таким образом уже потому, что создание общих теорий для меня задача *трудная* и вдвойне трудная в области, в которой минимум несомненных общих

независимых принципов, из которых можно было бы *все вывести*, не дан, а должен лишь быть найден. Такое предприятие скорее могло бы обещать успех, если исходить из математики. Так я обратил, поэтому, свое внимание на отдельные явления: приспособление мыслей к фактам, приспособление мыслей друг к другу[1], экономию мышления, сравнение, мысленный эксперимент, постоянство и непрерывность мышления и т. д. При этом было для меня полезно и действовало отрезвляющим образом то, что я рассматривал простое мышление, а также и всю науку, как явление биологическое, органическое, а *логическое* мышление, как *идеальный предельный случай*. Что можно *начать* исследование с *обоих* концов, я ни на один миг оспаривать не буду. Я сам называю мои попытки очерками по психологии познания[2]. Уже отсюда можно усмотреть, что я умею различать между вопросами психологическими и логическими, что я, впрочем, признаю за всяким, чувствующим потребность в освещении процессов логических и с точки зрения психологической. Но вряд ли кто-нибудь имеет право упрекать меня в том, что я желаю *нивелировать* различие между естественным, *слепым* и *логическим* мышлением, кто хоть раз хорошенько вчитался в логический анализ положений Ньютона в моей «Механике». Если бы даже логический анализ всех наук был уже делом завершенным, биологически-психологическое исследование их развития все еще оставалось бы для меня потребностью, что не исключало бы того, чтобы это последнее исследование было подвержено опять-таки логическому анализу. Если даже рассматривают экономию мышления, как чисто телеологический и, следовательно, временный лейтмотив, то сведение его к более глубоким основаниям[3] тем самым не только не исключается, а становится даже еще более необходимым. Но помимо этого экономия мышления есть также весьма ясный *логический идеал*, сохраняющий свое значение даже после *завершенного* логического анализа. Из одних и тех же принципов система науки может быть выведена еще различным образом. Но *один* из этих

[1]«Populär-Wissenschaftl». Vorlesungen, стр. 246. Здесь задачей настоящей *теории* признано приспособление мыслей *друг к другу*. По существу то же самое сказал, мне кажется, Грассманн в своем введении к «Учению о протяженности» на стр. 19: «Высшее деление всех наук есть деление на реальные и формальные: первые воспроизводят в мышлении бытие, как нечто, самостоятельно противостоящее мышлению, и истина их заключается в согласии мышления с этим бытием; содержанием вторых является то, что установлено самим мышлением и их истина заключается в согласии процессов мышления между собой».

[2]«Principien der Wärmelehre», Vorwort zur ersten Auflage.

[3]«Анализ ощущений».

выводов более соответствует принципу экономии, чем другие, как я это показал на примере из диоптрики Гаусса[1]. Таким образом, насколько я теперь вижу, я не думаю, чтобы исследования Husserl'а поколебали результаты моих исследований. Впрочем, мне следует дожидаться обнародования дальнейших его работ, в которых я от души желаю ему наилучшего успеха.

Когда я убедился в том, что идея экономии мышления столь часто возникала до и после меня, то это должно было принизить мое мнение о себе, но сама мысль, казалось мне, от этого только выигрывала в своем значении. И именно то, в чем Husserl усматривает принижение научного мышления, связь с обыкновенным («слепым»?) мышлением, кажется мне возвышением его. Дело, не выходящее за пределы кабинета ученого, превратилось в дело, имеющее глубокие корни в жизни человечества и оказывающее мощное обратное влияние на эту жизнь.

[1]«Wärmelehre», стр. 394.

Глава V

Отношение механики к другим областям знания

1. Отношения механики к физике

1. Чисто механических процессов совсем нет. Когда массы определяют взаимные ускорения друг друга, то с первого взгляда, правда, кажется, что это чисто двигательный процесс. Но с этими движениями в действительности бывают всегда связаны также изменения и термические, магнитные и электрические, и в той мере, в коей эти изменения выступают, процессы движения видоизменяются. И наоборот, условия термические, магнитные, электрические и химические могут определять движения. Таким образом, процессы чисто механические представляют собою абстракции, намеренно или по необходимости предпринимаемые в целях более легкого обзора. То же самое можно сказать и об остальных классах физических явлений. Каждый процесс — строго говоря — принадлежит ко всем областям физики, и грани, разделяющие эти последние, объясняются отчасти установившейся традицией, отчасти физиологическими и отчасти историческими причинами.

2. Воззрение, что механику следует рассматривать, как основу всех остальных отраслей физики, и что все физические процессы следует объяснять *механически*, есть, на мой взгляд, предрассудок. Не всегда исторически более древнее должно *оставаться* основой для понимания позднее найденного. По мере того, как становится известным и упорядоченным все большее и большее количество фактов, могут устанавливаться и совершенно новые руководящие воззрения. В настоящее время мы даже знать не можем, какие из физических явлений идут *всего глубже*, не следует ли считать явления механические именно наиболее поверхностными или не лежат ли они все *равно глубоко.* Даже в самой механике мы перестали же считать самый древний закон, закон рычага, основой всех остальных.

Механическое воззрение на природу представляется нам исторически понятной, извинительной, может быть, даже временно полезной,

но все же в целом искусственной гипотезой. Если мы хотим оставаться верными методу, который привел к великим результатам самых выдающихся наших естествоиспытателей, как Галилей, Ньютон, С. Карно, Фарадей, И. Р. Майер, то мы должны ограничить нашу физику выражением *фактического*, не строя позади этого, там, где нет ничего ни осязательного, ни поддающегося проверке, никаких гипотез. Нам остается тогда только одно: установление действительной связи между движениями масс, изменениями температур, изменениями величин потенциальной функции, химическими изменениями, не представляя себе позади этих элементов ничего другого, кроме физических признаков или характеристик, посредственно или непосредственно данных в наблюдении.

В применении к процессам термическим мысль эта была уже развита мной в другом месте[1], там же она была намечена и в применении к электричеству. В учении об электричестве всякая гипотеза жидкостей или среды отпадает, как ненужная, если принять в соображение, что с величинами потенциала V и диэлектрических постоянных все условия электричества даны. Если представлять себе разности величин потенциала измеренными (на электрометре) при посредстве сил и рассматривать, как первичное понятие, как поддающуюся измерению физическую характеристику, не количество электричества Q, а потенциал V, то количество электричества (для одного только изолятора) есть

$$Q = -\frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dv,$$

где x, y, z означают координаты, а dv — элемент объема. Электрическая энергия есть

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int V\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dv.$$

Здесь количество электричества Q и электрическая энергия W являются понятиями *производными*, в которых совсем нет уже представления жидкости или среды. Если аналогично вывести все понятия физики, можно ограничиться одним отвлеченным количественным выражением фактического. Все ненужные праздные представления и связанные с ними *мнимые* проблемы тогда отпадают.

[1] Э. Мах. «Принцип сохранения работы. История и корень его».

Приведенные строки, написанные в 1883 году, в то время могли встретить лишь очень мало сочувствия у огромного большинства физиков. Но нетрудно заметить, что с тех пор изложение физики значительно приблизилось к намеченному здесь идеалу. Хороший пример такого описания процессов при помощи одних дифференциальных уравнений представляет работа Герца «Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft», (1892) («Исследования о распространении электрической силы»).

Для устранения случайных исторически обусловленных или традиционных представлений очень полезно сравнивать между собой понятия различных областей и для каждого понятия из одной области отыскивать соответствующее в другой. Этим путем находят, что скоростям в движении масс соответствуют температуры и потенциальные функции. Величина скорости, потенциальной функции или температуры никогда не изменяется *одна*. Но для скоростей и потенциальных функций важны, насколько мы до сих пор можем это видеть, только разности, между тем как значение температуры заключается не только в разности сравнительно с другими температурами. Массам соответствуют теплоемкости, количеству теплоты — потенциал электрического заряда, энтропии — количество электричества и т. д. Изучение таких сходных черт и различий приводит к *сравнительной физике*, которая в конце концов предоставит нам возможность обобщенного выражения очень большой области фактов без *произвольных* прибавлений. Так мы придем к однородной физике и без всякой помощи искусственной атомной теории. См. мою книгу «Principien der Wärmelehre», стр. 396 и след.

Нетрудно также усмотреть, что при помощи механических гипотез настоящая *экономия* в научных мыслях достигнута быть не может. Если бы даже какая-нибудь гипотеза оказалась вполне достаточной для изображения какой-нибудь области явлений, например, явлений термических, мы только на место фактического отношения между процессами механическими и термическими поместили бы гипотезу. Число основных фактов заменяется столь же большим числом гипотез, что, вне всякого сомнения, никаких преимуществ не представляет. Раз какая-нибудь гипотеза по мере возможности облегчила нам усвоение новых фактов подстановкой мыслей, нам привычных и знакомых, то тем самым ее работоспособность исчерпана. Если от этой гипотезы ожидают *больше* выяснения, чем от *самих* фактов, то это приводит к отклонениям в сторону.

3. Развитию механического воззрения на природу содействовали многие условия. Во-первых, связь всех процессов природы с процессами механическими неоспорима, что приводит к стремлению менее известные еще процессы объяснять при помощи процессов более известных, механических. Кроме того, в области механики были впервые познаны великие общие законы выдающегося значения. Подобного рода законом является принцип живых сил $\sum(U_1 - U_0) = \sum \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$, который гласит, что приращение живых сил какой-нибудь системы при переходе ее из одного положения в другое равно приращению силовой функции (или работы), являющейся функцией начального и конечного положений системы. Если обращают внимание на работу, которая *может* быть совершена в системе, и называют ее вместе с Гельмгольцем силой упругости S, то каждая *действительно совершенная* работа U есть уменьшение первоначально существующей силы упругости K. Мы тогда имеем $S = K - U$, и принцип живых сил получает следующую форму

$$\sum S + \frac{1}{2}\sum mv^2 = \text{const}.$$

Это значит, что уменьшение силы упругости компенсируется увеличением живой силы. В этой форме принцип этот называется также законом *сохранения энергии*, так как сумма силы упругости (потенциальной энергии) и живой силы (кинетической энергии) остается в системе постоянной. Так как далее в природе на место совершенной работы вообще может быть получена не только живая сила, но и количество теплоты или потенциал электрического заряда и т. д., то в этом было усмотрено выражение *механического* процесса, лежащего в основе всех явлений природы. Но в этом выражено не что иное, как только неизменяемая количественная *связь* между механическими и другими процессами.

4. Было бы ошибочно думать, что великий и широкий взгляд был внесен в естествознание только механическим воззрением на природу. Нет, такой взгляд был достоянием первых исследователей всех времен и содействовал уже построению механики и, следовательно, не мог возникнуть лишь *через* эту последнюю. Галилей и Гюйгенс постоянно переходили от рассмотрения единичного к рассмотрению великого целого и обратно и пришли к своим великим результатам в своем стремлении к точке зрения простой и свободной от противоречий. Что скорости отдельных тел и систем связаны с высотами их падения, Галилей и Гюйгенс познали только благодаря самому точному исследованию движения падающего тела в отдельности вместе с усмотрением

того обстоятельства, что тела сами вообще только опускаются вниз. Гюйгенс уже по этому поводу указывает на невозможность механического perpetuum mobile: он стоит уже, следовательно, на современной точке зрения. Он чувствует ***непримиримость*** представления perpetuum mobile с привычными ему представлениями о механических процессах природы.

Фикции Стевина, например, фикция замкнутой цепи на призме, тоже представляют собою пример такого широкого взгляда. Это — развитое на основе многочисленных данных опыта представление, примененное к одному отдельному случаю. Движущаяся замкнутая цепь представляется Стевину движением падающего тела без падения, движением *бесцельным*, подобно намеренному действию, которое не соответствует намерению, стремлением к изменению, это изменение неосуществляющим. Если движение вообще связано с падением, то и в специальном случае падение связано с движением. Здесь проявляется, правда, не в весьма определенной форме, чувство *взаимной* зависимости между v и h в уравнении $v = \sqrt{2gh}$. Тонкое чувство исследователя, свойственное Стевину, усматривает в фикции противоречие, которое может ускользнуть от внимания менее глубоких мыслителей.

Тот же взгляд, сравнивающий единичное с целым, частное с общим, обнаруживается, но только не *ограниченный* одной механикой, и в работах С. Карно. Когда Карно находит, что количество теплоты Q, упавшее с более высокой температуры t на более низкую температуру t_1 при совершении работы L, зависит только от температуры и не зависит от природы тел, то он мыслит вполне по методу Галилея. Тому же методу следует и И. Р. Майер при установлении своего принципа эквивалентности теплоты и работы. Механическое воззрение на природу остается при этом ему чуждым, да он в нем и не нуждается вовсе. Кто нуждается в костылях механического воззрения на природу, чтобы прийти к познанию эквивалентности теплоты и работы, тот только наполовину понял тот шаг вперед, который в этом познании заключается. Но как бы высоко ни ценить оригинальную работу Майера, все же не следует слишком низко оценивать заслуги таких специалистов-физиков, как Джоуль, Гельмгольц, Клаузиус, Томсон, которые очень много, может быть, даже все сделали *для укрепления и развития* нового воззрения в его частностях. Допущение позаимствования идей Майера нам тоже кажется ненужным. Кто разделяет это допущение, тот обязан его и *доказать*. Неоднократное появление одной и той же идеи —

дело не новое в истории. Вопроса о личностях, который по истечении тридцати лет не представляет более интереса, мы здесь затрагивать не будем. Никак не достойно похвалы однако то, что будто бы из соображений справедливости наносятся оскорбления людям, которые могли бы жить спокойно и в почете, если бы они только сделали треть того, что они в действительности сделали.

В Германии работы Майера встретили сначала очень холодный, уклончивый, отчасти даже довольно недружелюбный прием, так что встретились даже затруднения в обнародовании их, между тем как в Англии они скоро встретили признание. За множеством обнародованных вслед за ними сочинений они вскоре были позабыты, но на них снова обратил внимание читающей публики Тиндаль своей восторженной похвалой им в своей книге «Heat a mode of motion» (1863). Это произвело впечатление и в Германии, и общее внимание к Майеру достигло апогея благодаря сочинению Дюринга «Robert Mayer, der Galilei des XIX Jahrhunderts» («Роберт Майер, Галилей XIX столетия», (1878)). Было почти похоже на то, что несправедливость, совершенная по отношению к Майеру, должна быть компенсирована несправедливостью по отношению к другим людям. Но, как и в уголовном судопроизводстве, сумма несправедливости становится от этого только больше, ибо алгебраического сокращения здесь нет. Восторженную и всестороннюю оценку заслуги Майера нашли в статье *Поппера* («Das Ausland», 1876, № 35), поучительной также многими интересными теоретико-познавательными воззрениями, которыми она изобилует. В моей книге «Principien der Wärmelehre» я попытался дать верное со всех сторон и справедливое изложение того, что сделано было различными исследователями в области механической теории теплоты. Из этого изложения ясно, что каждый из этих исследователей отличался одной какой-нибудь интеллектуальной особенностью, действовавшей благотворным образом на развитие этой теории. Майер может быть признан философом учения о теплоте и энергии. Джоуль тоже пришел к принципу энергии философским путем и обосновал учение экспериментально, а Гельмгольц дал ему теоретико-физическую основу. Гельмгольц, Клаузиус и Томсон содействовали связи его с кругом идей Карно, занимающего своими идеями особое положение. Каждый из упомянутых здесь исследователей мог бы и не быть. Ход развития только замедлился бы, но не был бы задержан совсем. (См. также сочинения Майера, изданные у Weyrauch, Stuttgart, 1893.)

5. Мы увидим теперь, что тот широкий взгляд, который нашел свое выражение в принципе сохранения энергии, не есть специальная черта механики, а связан с последовательным и всеобъемлющим естественнонаучным мышлением *вообще.* Наше естествознание заключается в воспроизведении фактов в наших мыслях или в отвлеченном количественном выражении фактов. Определения, получающиеся в результате этого воспроизведения, суть законы природы. В убеждении, что такие определения вообще возможны, заключается закон причинности. Закон причинности выражает *взаимную зависимость между явлениями.* Особое упоминание о пространстве и времени в выражении закона причинности не нужно, ибо все отношения пространства и времени снова сводятся ко взаимной зависимости между явлениями.

Законы природы суть уравнения между измеримыми элементами $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\ldots\,\omega$ явлений. Так как природа непостоянна и изменяется, то этих уравнений всегда меньше, чем элементов.

Если в нашем распоряжении имеются *все* величины $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\ldots$, которыми даны, например, величины $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$, то мы можем группу $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\ldots$ называть причиной, а группу $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$ следствием. В этом смысле мы можем сказать, что действие *однозначно* определяется причиной. Таким образом, закон достаточного основания, как его применяет, например, Архимед при развитии законов рычага, не выражает ничего, кроме того, что действие не может быть *одновременно* и определено и не определено некоторым числом условий.

Если два условия α и λ находятся в связи друг с другом, то изменению α, если остальные условия остаются без изменения, соответствует изменение λ и в общем изменению λ соответствует также изменение α. Это усмотрение *взаимной* зависимости мы находим у Стевина, Галилея, Гюйгенса и т. д. Та же мысль привела к отысканию *противоположных* явлений явлениям данным, известным. Изменению объема газов с изменением их температуры соответствует изменение температуры их с изменением их объема, явлению Зеебекка соответствует явление Пельтье и т. д. Конечно, при такого рода обратных отношениях необходимо быть осторожным в отношении *формы* зависимости. Из рис. 232 ясно видно, как каждому изменению λ может соответствовать заметное изменение α, но не наоборот. Хороший пример этому представляют отношения между явлениями электромагнитными и явлениями индукции, установленные Фарадеем.

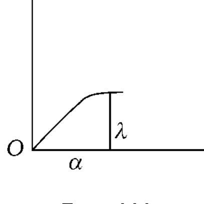


Рис. 232

Если какая-нибудь группа условий $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\ldots$, которой определяется другая группа $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$, переходит от начальных своих величин к величинам конечным $\alpha^1\,\beta^1\,\gamma^1\,\delta^1\,\ldots$, то и группа $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$ переходит в $\lambda^1\,\mu^1\,\nu^1\,\ldots$. Если первая группа возвращается к начальным своим величинам, то то же самое происходит и со второй группой. В этом заключается «эквивалентность причины и следствия», о которой многократно говорит Майер.

Если в первой группе происходят изменения только *периодические*, то и вторая может испытывать только периодические, но не длительные, *остающиеся* изменения. Столь плодотворные методы мышления Галилея, Гюйгенса, С. Карно, Майера и др. могут быть сведены к одному важному и простому познанию, а именно, что *чисто периодические изменения одной группы условий могут стать источником изменений другой группы условий тоже только периодических, а не длительных и остающихся.* Такие положения, как «действие эквивалентно причине», «работа не может быть создана из ничего», «perpetuum mobile невозможно», представляют собой специальные, менее определенные и ясные формы этого познания, которые сами по себе не связаны с одной только механикой, а составляют неотъемлемую часть естественнонаучного мышления вообще. С этим отпадает всякая метафизическая мистика, которая могла бы быть еще связана с принципом сохранения энергии[1].

Подобно понятию субстанции, идеи сохранения имеют свое веское основание в экономии мышления. Чистое, ничем не связанное изменение, без твердого опорного пункта не определено и не может быть воспроизведено. Возникает поэтому вопрос, какое представление может быть удержано при изменении как нечто *остающееся*, какой *закон* существует, какое *уравнение* остается исполненным, какие *величины* остаются постоянными? Когда говорят, что при всех преломлениях показатель преломления остается постоянным, при всех движениях тяжелых тел g остается равным $9,810^m$, в каждой замкнутой системе энергия остается постоянной, то все эти положения имеют одну и ту же экономическую функцию — облегчение воспроизведения фактов в наших мыслях.

[1]Отпадают также чудовищные применения этого принципа ко всему миру, если принять в соображение, что каждый естественнонаучный принцип есть абстракция, предполагающая повторение *однородных* случаев.

С этими строками, написанными в 1883 году, следует сравнить рассуждения Петцольдта о стремлении к *устойчивости* в интеллектуальной жизни («Maxima, Minima und Oekonomie. Vierteljahrsschr. f. w. Philosophie», 1891).

6. В применении к принципу энергии я позволю себе еще здесь прибавить то, что мне остается сказать по поводу обнародованных с 1883 года и обсуждающих тот же вопрос сочинений И. Поппера («Die physikalischen Grundsätze der elektrischen Kraftübertragung», Wien, 1883), Гельма (Helm «Die Lehre von der Energie», Leipzig, 1887), М. Планка («Das Princip der Erhaltung der Energie», Leipzig, 1887), Ф. Мюллера («Das Problem der Continuität in der Mathematik und Mechanik», Marburg, 1886). В своей *тенденции* независимые друг от друга работы Поппера и Гельма совпадают как между собою, так и с моими исследованиями настолько, что мне редко приходилось читать в такой мере симпатичные мне вещи при всем сохранении индивидуальных различий. Оба автора сходятся в попытке построения общей энергетики, и некоторые *намеки* на таковую можно найти также в одном примечании в моем сочинении «Принцип сохранения работы», стр. 66. С тех пор «Общая энергетика» была подробно разработана Гельмом, Оствальдом и др.

Еще в 1872 году («Принцип сохранения работы», стр. 51 и след.) я изложил, что убеждение в принципе исключенного perpetuum mobile основывается на более общем убеждении в *однозначной* определенности одной группы (механических) элементов $\alpha\beta\gamma\ldots$ другой группой элементов x, y, $z\ldots$. Несколько различные только по форме положения Планка (стр. 99, 138, 139) совпадают с этим по существу. Впрочем, я неоднократно доказывал, что все формы закона причинности имеют своим источником субъективные стремления, удовлетворять которые для природы *нет* необходимости; и это мое воззрение тоже родственно воззрениям Поппера и Гельма.

О «метафизических» точках зрения, которыми руководствовался Майер, говорят Планк на стр. 21 и след., 135, и Гельм на стр. 25 и след., и оба признают (Планк на стр. 26 и след., Гельм на стр. 28), что аналогичными, хотя и не ясно высказанными мыслями руководился, вероятно, и Джоуль; с этим взглядом я вполне согласен.

Скажу еще несколько слов о, так называемых, «метафизических» точках зрения Майера, которые, по словам Гельмгольца, сторонники метафизических умозрений превозносят, как нечто *высшее*, между тем

как Гельмгольц видит в них *слабейшую* сторону во всем его изложении. Такими положениями, как «из ничего не получается ничего», «действие равно причине» и т. д. *другому* ничего доказать нельзя. Сколь мало могут дать такие пустые положения, до недавнего времени *признаваемые* и в науке, я показал уже на примерах в моей книге «Принцип сохранения работы». При всем том эти положения у Майера мне все же не кажутся *недостатками*. Напротив того, они являются у него выражением *мощной*, инстинктивной, неудовлетворенной еще и невыясненной потребности (которую я не хотел бы назвать именно метафизической) в *субстанциональном* понимании того, что мы в настоящее время называем энергией. Что у Майера не отсутствовала и сила ума для *выяснения* своей потребности, мы в настоящее время знаем. В данном случае Майер действует по существу не *иначе*, чем Галилей, Блэк, Фарадей и др. великие исследователи, хотя некоторые, может быть, были молчаливее и осторожнее.

На этот пункт я указал уже в другом месте (в моей книге «Анализ ощущений»). Если не считать того, что я не разделяю точки зрения Канта и не стою на точке зрения метафизической вообще и в частности не на точке зрения Беркли, как это предположили поверхностные читатели моего упомянутого только что сочинения, то я в этом вполне схожусь с Ф. Мюллером (стр. 104 и след.). Подробный разбор принципа энергии можно найти в моей книге «Учение о теплоте» («Principien der Wärmelehre»).

2. Отношения механики к физиологии

1. Первоначальный источник всякой науки — потребность жизни. На какие мелкие ветви ни распадалась бы наука вследствие особого призвания, односторонней склонности и способности тех, которые взращивают ее, полную свою свежесть и живую силу каждая такая ветвь может сохранить только в связи с *целым*. Только при помощи этой связи она может с успехом преследовать свои специальные цели и спастись от тех или других чудовищных односторонних форм развития.

Разделение работы, ограничение исследователя одной небольшой областью, исследование этой области, как задача жизни — все это необходимые условия плодотворного развития науки. Только при такой односторонности и ограниченности могут достичь необходимого развития особые интеллектуальные экономические средства для того, чтобы

овладеть этой областью. Но вместе с тем здесь есть та опасность, что человек, постоянно оперирующий этими *средствами*, может переоценить их значение и даже усмотреть в них существенную *цель* науки, хотя в действительности они представляют лишь одно орудие ее.

2. И вот, вследствие несоразмерно большого формального развития физики сравнительно с остальными отраслями естествознания, на наш взгляд, действительно создалось такого рода положение дел. Средствам мышления физики, понятиям массы, силы, атома, вся задача которых заключается только в том, чтобы пробудить в нашем представлении экономно упорядоченный опыт, большинством естествоиспытателей приписывается реальность, выходящая за пределы мышления. Более того, полагают, что эти силы и массы и представляют то настоящее, что подлежит исследованию, и если бы они стали известны, все остальное получилось бы само собою из равновесия и движения этих масс. Если бы кто-либо знал мир только по театру и раз попал за кулисы, он мог бы подумать, что действительный мир нуждается в кулисах и что все было бы изучено, если бы были изучены эти кулисы. Вот так и мы не должны считать *основами* действительного мира те интеллектуальные вспомогательные средства, которыми мы пользуемся для *постановки* мира *на сцене нашего мышления.*

3. В правильном познании того подчиненного положения, в котором находится специальное знание по отношению ко всей науке в ее целом, заключается особая философия, развитию которой может содействовать каждый специалист-исследователь. Отсутствие ее проявляется в нарождении мнимых проблем, в самой постановке которых — безразлично, считают ли их разрешимыми или нет, — лежит уже ложь. Такая переоценка физики сравнительно с физиологией, незнание истинного отношения между ними выражается в вопросе: возможно ли *объяснить* ощущения движением атомов?

Исследуем обстоятельства, которые могут привести к постановке столь странного вопроса. Прежде всего заметим, что всем данным опыта об условиях пространственных и временных нами оказывается большее *доверие*, им приписывается более объективный, *более реальный* характер, чем данным опыта о цветах, тонах, теплоте и т. д. А между тем при более точном исследовании не трудно убедиться в том, что ощущения пространства и времени суть в такой же мере *ощущения*, как ощущения цветовые, звуковые, обонятельные, с той только разницей, что в общем обзоре первых у нас гораздо больше навыка и ясности,

чем в таковом же обзоре последних. Пространство и время суть хорошо упорядоченные системы рядов ощущений. Величины в уравнениях механики суть не что иное, как порядковые знаки тех членов этих рядов, которые должны быть выделены в нашем представлении. Уравнения выражают взаимную зависимость между этими порядковыми знаками.

Тело есть сравнительно постоянная сумма осязательных и световых ощущений, связанная с одними и теми же ощущениями времени и пространства. В принципах механики, каков например, принцип взаимного ускорения двух масс, находит непосредственное или посредственное выражение связь между ощущениями осязательными, световыми, пространства и времени. *Только* через содержание ощущений (часто сложное) эти принципы получают *понятный смысл.*

Таким образом, если бы мы хотели выводить ощущения из движений масс, то это значило бы не что иное, как объяснять более простое и более близкое более сложным и более далеким. Мы не говорим уже о том, что *понятия* механики суть экономические средства, развитые для изображения фактов *механических*, но не физиологических или *психологических.* При правильном различении между *средствами и целями* исследования, если ограничиться изложением *фактического*, такие ложные проблемы и возникать вовсе не могут.

4. Вся и всякая наука может делать только одно: воспроизводить и предвосхищать (vorbilden) в нашем мышлении комплексы тех *элементов*, которые мы обыкновенно называем ощущениями. Все дело в *связи* этих *элементов.* Такой элемент, как теплота какого-нибудь тела A, например, связан не только с другими элементами, совокупность которых мы называем пламенем B, но и с совокупностью элементов нашего тела, например, какого-нибудь нерва N. Как объект и элемент, нерв N не существенно, а только условно отличается от A и B. Связь между A и B относится к области физики, а связь между A и N — к области *физиологии.* Никакой из них не существует *один*, а существуют они *оба одновременно.* Только временами мы можем отвлекаться от того или другого из них. Таким образом, даже процессы, как будто бы чисто механические, суть вместе с тем всегда и процессы физиологические, и таковы же процессы электрические, химические и т. д. Механика рассматривает не *основу* и даже не *часть* мира, а только одну сторону его.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Добавление 1

К стр. 21, 26, 27.

Я должен здесь обратить внимание моих читателей на интересное сочинение G. Vailati («La dimostrazione del principio della leva data da Archimede. Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, Maggio e Giugno», 1904). В этом сочинении автор вместе с Hölder'ом выступает против моей критики вывода принципа рычага Архимедом, но отчасти обращается вместе с тем и против Hölder'a. Я надеюсь, что всякий с пользой прочтет рассуждения Vailati и, сравнив их со сказанным мною на стр. 21, 26, 27, будет в состоянии сам создать себе ясное суждение об этих спорных вопросах. Vailati показывает, что Архимед вывел принцип рычага, основываясь на общих данных опыта относительно центра тяжести. Что такой процесс возможен и допустим, на известной ступени развития науки даже весьма плодотворен и, может быть, является единственно правильным, я нигде не оспаривал, а, напротив того, вполне ясно признал той формой, в которой я изложил выводы Стевина и Галилея, сделанные по образцу Архимеда. Но задача всей моей книги убедить читателя в том, что *свойства природы* невозможно высосать из пальца при помощи само собой разумеющихся допущений, а они должны быть получены из *опыта*. Я преступил бы против этой задачи, если бы я не содействовал разрушению впечатления, будто из равновесия *равных* грузов на *равных плечах* может быть выведен общий закон рычага. Я должен был поэтому показать, *где* вводится опыт, который содержит уже в себе *весь общий* закон рычага. Вот этот опыт и содержится в приведенном на стр. 22 допущении, как и в равной мере в каждом из приведенных Vailati общих, несомненно правильных положений о центре тяжести. Пропорциональная плечу рычага величина груза не получается простейшим образом путем анализа непосредственно из *одного* такого опыта, а предлагается не ожидавшему этого читателю, как нечто, найденное искусственными окольными

путями — вот что может возразить современный естествоиспытатель против вывода Архимеда. Тот же вывод из простых, почти само собою понятных положений может *привести в восхищение* математика и именно поклонника метода Евклида и всякого другого, приходящего в соответствующее настроение. Но при других настроениях, при других целях у нас есть все основания различать между подстановкой и убеждением, между неожиданностью и познанием. Если читатель извлечет какую-нибудь пользу из этого спора, то для меня будет делом маловажным, прав ли я в каждом своем слове.

Добавление 2

К стр. 74.

В своей книге «Les origines de la statique», Paris, 1905. Т. 1, Дюгем развивает ту, отстаиваемую уже Wohlwill'ом, мысль, что современная научная культура гораздо глубже связана с античной, чем это обыкновенно думают. Научные идеи эпохи Возрождения очень медленно и постепенно развились из научных идей древних греков и именно школы перипатетиков и александрийской школы. Я должен тут же заметить, что в книге Дюгема собрано и сжато огромное множество подробностей поучительных, разъясняющих и дающих толчок мышлению подробностей, знание которых, не будь этой книги, могло быть достигнуто только кропотливым изучением древних сочинений и манускриптов. Уже по одному этому книга эта чудесная и весьма поучительная.

В особенности Дюгем останавливается на писателе XIII столетия по имени Иорданус де Неморе, как посреднике в передаче античных идей, а также на писателе более позднего времени, который обработал книгу «Liber Iordani de ratione ponderis» и которого он называет «предтечей Леонардо да Винчи». И тому и другому Дюгем приписывает большое влияние на Леонардо, Кардано и Бенедетти. Важнейшие поправки к книге «Iordani opusculum de ponderositate», которую Тарталия выдавал за свою собственную и которой он воспользовался также в своей книге «Quesiti et inventioni diverse», не упомянув даже при этом о Иордანусе и его позднейшем истолкователе, содержатся в рукописи «Liber Iordani de ratione ponderis», которую Дюгем нашел в национальной библиотеке в Париже (fond latin №7378A). Это приводит к допущению анонимного «предтечи». Да и рукописи Леонардо, плохо сохранившиеся и незащищенные от никем не разрешенного пользования, оказали, по мнению

Дюгема, свое влияние на Кардано и Бенедетти, несмотря на запоздалое опубликование. Названные здесь авторы оказали свое влияние в Италии прежде всего на Галилея и в Голландии на Стевина. Этими двумя путями влияние их проникло и во Францию, где они встретили плодотворную почву прежде всего у Роберваля и Декарта. Таким образом, непрерывная связь между древней и современной статикой никогда не была прервана.

Остановимся теперь на некоторых подробностях. В своих «Механических проблемах» Аристотель относительно рычага замечает, что находящиеся в равновесии грузы обратно пропорциональны плечам рычага или обратно пропорциональны дугам, описанным конечными точками плеч при движении последних. При большой свободе толкования можно усматривать в этом замечании несовершенное выражение принципа возможных перемещений. Но у Иордануса де Неморе (см. Дюгем, стр. 121, 122) равновесие рычага характеризуется тем, что *высоты поднятия* или *глубины падения* находящихся в равновесии грузов обратно пропорциональны этим последним, чем и обозначаются действительно *решающие* условия. Иорданус знает также, что груз не всегда одинаково действует, и вводит, хотя и только *качественно*, понятие gravitas secundum situm. «Secundum situm gravius, quando in eodem situ minus obliquus est descensus» (l. c., стр. 118). «Предтеча» Леонардо исправляет и дополняет изложение Иордануса. Он познает равновесие углового рычага, ось которого лежит выше груза, как равновесие *устойчивое*, приняв во внимание возможные глубины падения и высоты поднятия (l. c., стр. 142). Он знает также, что такой рычаг так ориентируется, что грузы пропорциональны расстояниям от вертикали, проведенной через ось (l. c, стр. 142, 143) и таким образом доходит в сущности до употребление понятия *моментов*. Таким образом, gravitas secundum situm получает уже здесь форму *количественную* и находит блестящее применение для решения проблемы наклонной плоскости (l. c., стр. 145). Если два груза на наклонных плоскостях равной высоты, но различной длины в состоянии покоя так связаны между собою при помощи нити и блока, что один должен подниматься вверх, когда другой опускается вниз, то в случае равновесия эти грузы обратно пропорциональны *вертикальным* перемещениям, т. е. прямо пропорциональны длинам наклонных плоскостей. Очевидно, что этим наш «предтеча» предвосхитил уже существенные элементы современной статики.

Изучение лишь частично обнародованных манускриптов Леонардо

дает богатейшую добычу. Сравнение различных его случайных примечаний ясно указывает на то, что ему был уже известен принцип возможных перемещений или — лучше говоря — было известно понятие работы, хотя у него не было еще для этого особого обозначения. «Если какая-нибудь сила ведет (поднимает?) какое-нибудь тело (груз?) в течение известного времени по определенному пути, то та же самая сила, в то же самое время может вести (поднять?) половину тела (груза?) по двойному пути». Правило это применяется к машинам, рычагам, системам блоков и т. д., чем смысл приведенных выше слов, сам по себе сомнительный, получает ближайшее определение. Если имеется определенное количество воды, которое может упасть на определенную глубину, то можно (по Леонардо) этой водой приводить в движение одну или также две равные мельницы, но во втором случае можно совершить лишь столько работы, сколько в первом. Гениальное обобщение «потенциального рычага» дает Леонардо возможность достичь всех тех познаний, которые впоследствии основывались на понятии «момента». Судя по его чертежам, следует полагать, что путь к его концепции указало ему его рассмотрение блока и ворота (см. «Механика», стр. 26). Конструкции Леонардо касательно натяжений в комбинациях веревок тоже, очевидно, основаны на идее потенциального рычага. Менее счастлив был Леонардо в решении проблемы наклонной плоскости. Рядом с чертежами, в которых мимолетно проявляется и правильное понимание, можно найти множество неправильных конструкций. Но записи Леонардо приходится рассматривать лишь как дневник, куда могут быть занесены самые различные мимолетные мысли и точки зрения, начатки исследований, без всякого стремления развить эти исследования с точки зрения одного объединяющего принципа. Но если Леонардо не справляется с проблемами, в XIII столетии вполне уже решенными, то это доказывает только то, — и в этом нельзя не согласиться с Дюгемом — что далеко еще не достаточно, чтобы какое-нибудь познание было раз получено и стало известным, а требуются часто годы и столетия, чтобы это познание было общепризнанно и всеми понято (Duhem, l. c., стр. 182).

Мысль о невозможности perpetuum mobile мы находим у Леонардо развитой уже до высокой степени ясности. Этого следовало уже ожидать ввиду приведенных выше рассуждений его о мельнице. «Никакой импульс без жизни не может давить или притягивать тело, не сопутствуя движущемуся телу; импульсы эти не могут быть ничем иным,

как только силами или тяжестью. Когда тяжесть давит или притягивает, она вызывает движение только потому, что она (в своей цели) стремится к покою; ни одно тело не может при помощи своего движения падения вернуться на первоначальную свою высоту; движение его имеет конец» (l. c., стр. 53). «Сила есть духовная невидимая мощь, сообщаемая движением телам (здесь следует, по-видимому, подразумевать то, что в настоящее время зовется живой силой); чем больше эта сила, тем быстрее она истрачивается» (l. c., стр. 54). Кардано стоит на подобной же точке зрения и в ней можно усмотреть влияние Леонардо, если есть основания отказывать Кардано в самостоятельности (l. c., стр. 40, 57, 58). Встречаемся мы снова у Кардано и с той мыслью Аристотеля, что только круговое движение неба есть движение вечное. Дюгем не видит в Кардано обыкновенного плагиатора. Он, правда, использовал работы своих предшественников и именно работы Леонардо, не упомянув об этом, но привел эти работы в лучшую связь и исправил их соответственно состоянию науки в XVI столетии (l. c., стр. 42, 43). С проблемой наклонной плоскости Кардано не справляется; он полагает, что вес тела на наклонной плоскости относится ко всему весу, как угол наклона ее относится к прямому углу. Бенедетти становится в оппозицию ко всем предшественникам, каковая оппозиция особенно благотворно действует критикой динамических учений Аристотеля. В остальном однако Бенедетти часто оспаривает то, что правильно. В его сочинениях снова встречаются мысли Леонардо и, правда, ошибки последнего.

Если признать изложенные здесь открытия достаточно известными и доступными последующим ученым, то этим последним и в особенности Стевину и Галилею остается еще совершить в статике немного. Решение Стевином проблемы наклонной плоскости (см. «Механика», стр. 29 и след.), правда, вполне оригинально, но *результат* его рассуждений, как и рассуждений Галилея, примыкающего к мыслям Кардано, был уже известен «предтече» Леонардо. Стевин от рассмотрения наклонной плоскости приходит еще к сложению и разложению *прямоугольных* составляющих, согласно принципу параллелограмма, усматривает общезначимость этого принципа, не умея однако ее доказать. Последний пробел заполняет Роберваль. Он представляет себе груз R уравновешенным грузами P, Q произвольного направления, подвешенными к нитям, переброшенным через блоки. Если рассматривать сначала одну нить, как стержень, вращаемый вокруг блока, применить принцип потенци-

ального рычага Леонардо и затем таким же образом поступить с другой нитью, то можно найти отношения, существующие между грузом R и грузами P, Q и все правила относительно треугольника или параллелограмма сил (l. с., в особенности стр. 319). Декарт находит в принципе возможных перемещений основу для понимания *всех* машин. В работе, в произведении из веса на глубину падения (по его обозначению force), он видит определяющее начало, причину действия машин, не голое *как*, а *почему* того, что происходит. Важна не скорость, а высота поднятия и глубина падения. «Ибо одно и то же, поднять ли 100 фунтов на 2 фута или 200 фунтов на 1 фут» (l. с., стр. 328, см. также «Механика», стр. 52, изречение Паскаля). Декарт отрицает несомненное влияние на его идеи всех предшественников от Иордануса до Роберваля. При всем том можно найти в его доводах важные дальнейшие шаги вперед и он выдвигает весьма существенные пункты (l. с. стр. 327, 352).

За подробностями приходится отослать читателя к превосходной книге Дюгема. Здесь я хотел бы только высказать *мой* взгляд, — несколько отличный от взгляда Дюгема — на отношение, существующее между древним и современным естествознанием. Естествознание развивается двояким путем. *Во-первых*, тем, что мы стараемся удержать в памяти наблюденные факты, процессы, воспроизводить их в наших представлениях, реконструировать в нашем мышлении. Но по мере развития наблюдений эти последовательно или одновременно предпринятые попытки конструкции обнаруживают всегда известные недостатки, нарушающие согласие как между собой, так и с наблюденными фактами. Возникает поэтому потребность в фактических поправках и логическом соглашении различных построений, и в этом заключается *второй* процесс, которым развивается естествознание. Если бы каждый человек был предоставлен только себе самому, если бы он должен был все начинать сначала, собственными своими наблюдениями и мыслями он далеко уйти не мог бы. И это следует сказать не только об отдельном человеке, но и об отдельном народе. Трудно поэтому переоценить значение наследия, доставшегося нам от наших непосредственных предшественников по культуре — естествоиспытателей, астрономов и математиков Древней Греции. Вооруженные, правда, недостаточной картиной мира и в особенности дисциплинированные логическими и критическими работами греческих математиков, мы приступаем к исследованию при уже благоприятных условиях. Это наследие облегчает нам продолжение работы. Но не только одно научное наследие важно, а важна

также *материальная* культура, в нашем частном случае — дошедшие до нас машины и орудия, как и традиции их употребления. Опираясь на это материальное наследие мы без труда можем *сами* установить или повторить и расширить те наблюдения, которые привели древних исследователей к их научным построениям, и только таким образом лишь научиться собственно *понимать* их. Это материальное наследие, постоянно пробуждающее сызнова нашу самодеятельность, *слишком низко*, мне кажется, *оценивается* сравнительно с литературным. Раз возможно допустить, что скудные замечания Аристотеля о рычаге и даже гораздо более точные замечания математиков александрийской школы и сами не пришли бы в голову людям, работающим с машинами и производящими наблюдения, если бы даже эти замечания не дошли до нас в сочинениях древних? И разве не то же самое можно сказать о познании невозможности perpetuum mobile, которая должна же прийти в голову каждому, кто не ищет, как фантазер, чудес в механике, подобно алхимикам, и, как здравый исследователь, практически работает с машинами? Даже когда такие открытия сообщаются последующим ученым, последние все же должны всегда самостоятельно усваивать их. Единственное их преимущество заключается в том, что они быстрее проходят то же расстояние и потому могут опередить своих предшественников. Выраженное в словах несовершенное познание образует сравнительно более твердую опору для неустойчивых мыслей. Из этой опоры исходят последующие ученые в своих наблюдениях фактов и к ней постоянно возвращаются для критических сравнений. Пусть дальнейший опыт сильнее укрепляет эту опору или, напротив, постепенно отодвигает ее, или, наконец, совершенно ее опровергает, во всяком случае она, в конце концов, все же принесла свою пользу. Но если какой-нибудь предшественник пользуется большим авторитетом, действует внушительным образом на своих последователей, если его заблуждения превозносятся, как плоды глубокого познания, то все это может действовать только парализующим образом на последователей. Не кажется ли, на основании некоторых рассуждений Wohlwill'a и П. Дюгема, что даже сам Галилей до глубокой старости не отделался от наследия перипатетиков, помешавшего ему заметить с достаточной ясностью собственный свой, гораздо более сильный свет? Поэтому при оценке значения какого-нибудь научного исследования важно только одно, а именно, какое *новое* употребление он сделал из старых познаний и при какой *оппозиции* современников и последующих ученых *его*

познания добились признания. С этой точки зрения мне кажется, что Дюгем все же несколько далеко заходит в своем почтении перед Аристотелем. У Аристотеля («De coelo», LIII, с. 2) мы находим среди неясных и малопривлекательных выражений следующие места: «Какова бы ни была движущая сила, меньшее и более легкое получит от одной и той же силы больше движения ... Скорость менее тяжелого тела относится к скорости более тяжелого, как более тяжелое к более легкому телу». Если не принимать во внимание, что *нельзя* требовать от Аристотеля строгого различения между путем, скоростью и ускорением, то можно в этом найти выражение примитивного *правильного* опыта, который в конце концов привел к понятию массы. Но, принимая во внимание уже все содержание главы 2, представляется немыслимым относить это место к поднятию грузов машинами, сопоставить его с выражениями Аристотеля о рычаге и усматривать в этом зародыше понятия работы (Duhem, l. c., стр. 6, 7; Vailati, «Bolletino di bibliografia e storia di scienze matematiche», 1906, «Febbraio e Marzo», стр. 3). Далее Дюгем порицает Стевина за его антипатию к перипатетикам. Но Стевин, мне кажется, все же прав, когда он восстает против «чудесных» кругов Аристотеля, которые в случае равновесия вовсе и не описываются. Это настолько же основательно, как и протест Жильбера и Галилея против допущения действия одного места или точки («Механика», стр. 160). Только при более зрелой точке зрения, когда работа признана началом, определяющим скорость, динамический вывод равновесия получает преимущество большей рациональности и всеобщности. До этого же вряд ли что-нибудь можно возразить против гениальных выводов Стевина, основанных на инстинктивном опыте и следующих образцу Архимеда.

Добавление 3

К стр. 93.

Чтобы ясно представить себе, как медленно человек осваивался с новыми представлениями о воздухе, достаточно прочесть статью о воздухе, которую нашел нужным перепечатать из Энциклопедии в своем «Философском словаре» один из просвещеннейших людей своего времени, Вольтер, в 1764 году, т. е. столетие спустя после Герике, Бойля и Паскаля и незадолго до открытий Кавендиша, Пристлея, Вольта и Лавуазье. Воздух-де невидим и вообще не воспринимаем; все

функции, приписываемые воздуху, могли бы быть выполнены и воспринимаемыми испарениями, в существовании которых сомневаться не было бы оснований. Как-де может воздух нам помочь одновременно слушать различные тоны какого-нибудь музыкального произведения? В отношении достоверности своего существования воздух и эфир ставятся здесь на одну доску.

Добавление 4

К стр. 117.

Цитаты из сочинений Галилея

Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. Dialogo secondo.

«Sagr. Ma quando l'artiglieria si piantasse non a perpendicolo, ma inclinata verso qualche parte, qual dovrebbe esser'il moto della palla? andrebbe ella forse, come nel l'altro tiro, per la linea perpendicolare, e ritornando anco poi per l'istessa?»

«Simpl. Questo non farebbe ella, ma uscita del pezzo seguiterebbe il suo moto per la linea retta, che continua la dirittura della canna, se non in quanto il proprio peso la farebbe declinar da tal dirittura verso terra».

«Sagr. Talche la dirittura della canna è la regolatrice del moto della palla: nè fuori di tal linea si muove, o muove rebbe se'l peso proprio non la facesse declinare in giù ... »

(Беседа о двух основных системах мира. Беседа вторая.

Сагр. Но когда орудие поставлено было бы не перпендикулярно, а наклонно к некоторой плоскости, то каково должно было бы быть движение ядра? Полетело ли бы оно, как и при другом выстреле, по перпендикулярной линии, и возвратилось ли бы также затем само собою?

Симпл. Этого оно не сделало бы, а, выйдя из орудия, оно последовало бы в своем движении по прямой линии, составляющей продолжение направления дула орудия, если бы собственный его вес не заставлял его отклоняться от такого направления к земле.

Сагр. Следовательно, направление дула есть регулятор движения ядра: вне такой линии оно не движется, или не двигалось бы, если бы собственная тяжесть не тянула вниз ...)

Discorsi e dimostrazioni matematiche. Dialogo terzo.

«Attendere insuper licet, quod velocitatis gradus, quicunque in mobili reperiatur, est in illo suapte natura indelebiliter impressus, dum externae causae accelerationis, aut retardationis tollantur, quod in solo horizontali plano contingit: nam in planis declivibus adest jam causa accelerationis majoris, in acclivibus vero retardationis. Ex quo pariter sequitur, motum in horizontali esse quoque aeternum: si enim est aequabilis, non debiliatur, aut remittitur, et multo minus tollitur».

(«Кроме того нужно принять во внимание, что как бы ни была велика степень скорости движения, она по природе своей остается вечной, пока не уничтожается внешними причинами ускорения или замедления, что происходит только в горизонтальной плоскости: при движении вверх по наклонной плоскости присутствует уже причина большего замедления, а при движении вниз по этой плоскости — причина большего ускорения. Отсюда равным образом следует, что на горизонтальной плоскости движение вечно: если это движение равномерное, оно не уменьшается и — тем более — не прекращается»).

Верно то, что Галилей пришел к познанию закона инерции лишь постепенно, да и открыл он его лишь случайно. При всем том приведенные здесь места из его сочинения, изданного в Падуе в 1744 году, показывают, что ограничение этого закона движения по горизонтальной плоскости основывалось у него на обсуждаемом материале и что вряд ли правильно допущение, будто Галилей до конца своей научной деятельности был лишен полного знания этого закона.

Добавление 5

К стр. 130.

В свои молодые годы Галилей защищал тот взгляд, что движущее тело без всякого посредства сообщает движущемуся телу постепенно убывающую силу, между тем как у Аристотеля воздух, приведенный в движение движущим телом, сохраняет это движение в течение более или менее долгого времени и постепенно сообщает его движущемуся телу. Согласно исследованиям Wohlwill'а впервые вполне определенным образом выступил против этого последнего взгляда, противоречащего всякому здоровому инстинкту, писатель VI столетия Филопон. Для чего движущая рука должна прикасаться к камню, если обо всем позаботится воздухе? Этот естественный взгляд Филопона не замедлил оказать свое влияние на Леонардо, Кардано, Бенедетти, Джордано

Бруно и Галилея. Решительно выступает также Филопон, ссылаясь при этом на очевидные факты, против утверждения, будто тела большого веса быстрее падают. Наконец, более новая черта во взглядах Филопона выражается и в том, что он отрицает какую бы то ни было силу за *местом в себе*, но телам приписывает стремление сохранить свой порядок. («Механика», стр. 160, E. Wohlwill, «Ein Vorgänger Galileis im VI Iahrhundert. Physikalische Zeitschrift von Riecke und Simon», 7 Iahrg., Nr. 1, стр. 23–32).

Далее необходимо еще здесь указать на исследования Дюгема (P. Dahem, «De l'accélération produite par une force constante, notes pour servir à l'histoire da la dynamique. Congrès international de philosophie», Genève, 1905, стр. 859). Не вдаваясь в многочисленные подробности, сообщаемые Дюгемом и представляющие исторический интерес, мы ограничимся здесь только следующими соображениями. Согласно учению Аристотеля, понимаемому буквально, постоянная сила должна была бы обусловливать постоянную скорость. Но так как возрастающая скорость падающего тела не может не быть замеченной даже грубым наблюдением, то возникает затруднение — необходимость примирить это ускорение с господствующим учением. По мнению Аристотеля, тело по мере приближения к земле становится все тяжелее. Ведь становятся же и шаги странника более поспешными, чем ближе он приближается к своей цели, замечает Тартаглия. Чтобы сделать противоречия не столь вопиющими, приходится приписывать воздуху то одну, то другую роль, то роль помехи, то опять роль двигателя. Препятствующий движению тела слой воздуха между этим последним и землею (толкует один из комментаторов Симплициус) в начале его движения больше, чем к концу его. «Предтеча» (см. добавление 2) Леонардо опять находит, что воздух, раз приведенный в движение, составляет меньшую помеху для приведенного в движение тела. Наивный наблюдатель камня, брошенного в косом или горизонтальном направлении и описывающего в начале движения почти прямой путь, не мог не получить то естественное впечатление, что тяжесть уничтожается импульсом движения («Механика», стр. 128). Отсюда и различие между движением естественным и насильственным. Рассуждения о движении брошенного тела у Леонардо, Тартаглия, Кардано, Галилея и Торричелли показывают, как постепенно представление смены двух движений, рассматриваемых, как различные в своей основе, сменяется представлением о смешении и одновременности обоих. Леонардо знает ускорен-

ное движение падающего тела, догадывается о приращении скорости пропорционально времени, которое он приписывает постепенно уменьшающемуся сопротивлению воздуха, но не умеет находить правильную зависимость от времени пространства, пройденного телом в своем движении. Только около середины XVI столетия возникла мысль, что тяжесть сообщает падающему телу непрерывные импульсы, которые и прибавляются к сообщенной силе, существующей уже и постепенно убывающей. Сторонниками этого взгляда являются А. Пикколомини, Ж. Скалигер и И. Бенедетти. Уже Леонардо, между прочим, замечает, что стрела получает импульсы от тетивы не только в момент наибольшего напряжения ее, но и в остальных ее положениях (Duhem, l. c., стр. 882). Но только после того как Галилей совершенно отказался от допущения постепенного произвольного убывания vis impressa и свел это убывание к сопротивлениям и действующим в противоположном направлении силам, после того как он исследовал движение падающего тела экспериментально и без всякого соображения о причинах его, могли быть получены в чистом количественном виде законы равномерно ускоренного движения падающего тела.

Далее из исторического изложения Дюгема следует, что заслуги Декарта в развитии, независимо от Галилея, основных представлений современной динамики более значительны, чем это принимают обыкновенно и чем принимал я сам («Механика», стр. 218). Я очень благодарен Дюгему за это поучение. Во время своего пребывания в Голландии (1617–1619) Декарт вместе с Беекманном занимался изучением ускорения падающего тела, исходя из исследований Кардано и, вероятно, также Скалигера и Бенедетти. Как это явствует из писем к Мерсенну 1629 года, т. е. до опубликования работы Галилея, он совершенно познал закон инерции, закон равномерно ускоренного движения под действием постоянной силы и ошибался только в определении зависимости расстояния, пройденного телом в своем движении, от времени. Идеи Декарта и Галилея дополняют друг друга. Галилей исследует движение падающего тела феноменологически, не задаваясь вопросом о причинах его, между тем как Декарт выводит это движение из действия постоянной силы. В обоих исследованиях естественно проявляет свое действие элемент конструктивно-спекулятивный; разница только та, что у Галилея этот элемент тесно связан с конкретным случаем, между тем как у Декарта он начинает проявлять свое действие гораздо раньше, при данных опыта более общего характера. Декарт наблюдал (см. его

«Принципы философии») передачу движения, потерю движения ударяющегося тела, приобретение движения телом, получившим удар, и отсюда вывел общие философские идеи: 1) без передачи движения другим телам нет потери движения (инерция); 2) каждое движение первоначально или откуда-либо передано; 3) первоначальное количество движения неразрушимо. Стоя на этой точке зрения он каждое движение, которое казалось произвольным и причины которого невозможно было заметить, мог представлять себе только вызванным невидимыми ударами-импульсами (см. «Механику», стр. 249).

Великое преимущество, которое я — в противоположность, может быть, Дюгему — приписываю методу Галилея, заключается в тщательном полном описании голого факта. После такого описания под выражением «сила» не остается ничего более скрытым, что могло бы еще быть раскрыто или разгадано при помощи спекулятивных умозрений. В этом пункте вряд ли и в настоящее время существует уже единогласие мнений.

Добавление 6

К стр. 210.

Астрономы нашли необходимым разрешать вопрос о связи системы инерции при помощи координатной системы, употребляемой в астрономии. См. A. Anding, «Ueber Coordinaten und Zeit, Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften», VI, 2, Heft 1. H. Seeliger. «Ueber die sogenannte absolute Bewegung», Sitzungsbericht der Münchener Akademie, mathem.-naturwissensch. Classe, Bd. 36, Heft 1, 1906. Последняя работа заканчивается следующими словами: «После всего сказанного мы можем с некоторой уверенностью высказать положение, что употребляемая в астрономии эмпирическая система координат может вращаться около системы инерции не больше, чем на несколько, вероятно, очень немного дуговых секунд в столетие».

Если система инерции достаточно прочно установлена для практического употребления, то это все же не помешает физику стремиться к познанию того, в какой мере определение ее зависит от отдельных масс мирового пространства. Это стремление лежит в основе работ Феппля (A. Föppi, «Ueber einen Kreiselversuch zur Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde», Sitzungsbericht der Münchener Akademie, Bd. 34, 1 Heft, 1904; «Ueber absolute und relative Bewegung».

Ibid, 3 H.). Во второй из поименованных здесь работ Феппль исходит из следующих мыслей. Если бы все небесные тела занимали неподвижные друг относительно друга положения, то на основании всего предыдущего нашего опыта следовало бы ожидать, что предоставленное себе самому тело, отнесенное к системе, неподвижно связанной с теми телами, будет описывать путь *прямой.* Если мы из всего мира выделим какое-нибудь большое тело, наш земной шар, например, то предоставленное себе самому тело поблизости от него все еще будет двигаться почти так, как в предыдущем случае. При достаточной тщательности исследования явления можно было бы однако все же найти, что на это движение оказывает определенным образом влияние относительное движение этого тела к близкой и огромной массе Земли. Если удастся установить род этих «сил скорости», явится надежда понять, согласно принципу наложения, конструкцию всей системы инерции. Феппль считает возможным, что упомянутые силы при известных условиях оказывают действия, подобные действиям сил тяготения и потому еще не заметные. Принимая во внимание эту точку зрения, легко понять опыты Феппля, описанные в первой из упомянутых выше его работ. Цель этих последних установить, нельзя ли доказать влияние вращающейся массы Земли на зависимость от неба неподвижных звезд — маятника Фуко или скорее замещающего его, более чувствительного волчка, приведенного в движение электромагнитным путем? Из своих опытов, не обладающих еще всей достижимой точностью, Феппль делает тот вывод, что это влияние не может быть больше 2%. Названный автор считает результаты до сих пор произведенных им опытов отрицательными, но продолжение их все же не считает делом безнадежным. Он усматривает подтверждение этому в таких непонятых еще до сих пор явлениях, как предположенные К. Кохом (K. R. Koch. «Drude's Annalen», Bd. 15, 1904, стр. 146) изменения во времени силы тяжести и доказанное E. H. Hall'ем (Physical Review, XVII, 1903, стр. 179, 245) заметное южное отклонение падающих тел.

Могу еще только прибавить, что приведенные выше четыре работы для меня представляют величайший интерес. Желаю их авторам наилучшего успеха, ибо к каким результатам они ни пришли бы, во всяком случае они внесут свет в затронутые здесь вопросы. Так как о предположенных Фепплем дополнительных силах скорости неизвестно еще ничего, то следовало бы, может быть, еще обсудить, не могли ли бы опыты с поступательными движениями (падения) дать более

благоприятные результаты, чем опыты с вращающимися массами, ибо в последнем случае компенсация одного действия другим — дело не невозможное.

Добавление 7

К стр. 222.

Было доказано, что современная форма нашей механики основана на исторической случайности. Поучительным образом это освещается в работах полковника Гартманна (Lt–Colonel, «Definition physique de la force». Gongrès international de philosophie. Genève, 1905, стр. 728. См. также «L'enseignement mathematique», Paris et Genève, 1904, стр. 425.) Автор доказывает применимость обычных форм понимания *различных* понятий.

Хронологический обзор некоторых выдающихся ученых и наиболее важных для обоснования механики их сочинений

Archimedes (287–212 до Р. Х.).

Leonardo da Vinci (1452–1519).

Guido Ubaldi (*o*) *e Marchionibus Montis* (1545–1607). Mechanicorum liber.

S. Stevinus (1548–1620). Beghinselen der Weegkonst; Hyponmemata math.

Galilei (1564–1642). Discorsi e dimostracioni matematiche. (Leiden, 1638).

Kepler (1571–1630). Astronomia nova (Heidelberg, 1609); Harmonices mundi (Linz, 1615); Stereometria doliorum (Linz, 1615).

Marcus Marci (1595–1667). De proportione motus (Prag, 1639).

Descartes (1596–1650). Principia philosophiae (Amsterdam, 1644).

Roberval (1602–1675). Sur la composition des mouvements. Anc. Mém. de l'Acad. de Paris, T. VI.

Guericke (1602–1686). Experimenta Magdeburgica (Amsterdam, 1672).

Fermat (1608–1665). Varia Opera (Paris, 1679).

Torricelli (1608–1647). Opera geometrica (Florenz, 1644).

Wallis (1616–1703). Mechanica sive de motu (London, 1670).

Mariotte (1620–1684). Oeuvres (Leiden, 1717).

Pascal (1623–1662). Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs (Paris, 1648); Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air.

Boyle (1627–1691). Experimenta physico mechanica (London, 1660).

Huygens (1629–1695). The laws of motion on the collision of bodies. Philos. Trans. 1669; Horologium oscillatorium (Paris, 1673); Opuscula posthuma.

Wren (1632–1723). The law in the collision of bodies. Philos. Trans. 1669.

Newton (1642–1726). Philosophiae naturalis principia mathematica.

Leibniz (1646–1716). Acta eruditorum 1686, 1695; Leibnizii et Joh. Bernoullii comercium epistolicum (Lausanne u. Genf, 1745).

Jakob Bernoulli (1654–1705). Opera omnia (Genf, 1744).

Varignon (1654–1722). Projet d'une nouvelle mécanique (Paris, 1687).

Johann Bernoulli (1667–1748). Acta erudit. 1693; Opera omnia (Lausanne).

Maupertuis (1698–1759). Mém. de l'Acad. de Paris, 1740; Mém. de l'Acad de Berlin, 1745, 1747; Oeuvres (Paris, 1752).

Maclaurin (1698–1746). A complete system of fluxions (Edinburgh, 1742).

Daniel Bernoulli (1700–1782). Comment. Acad. Petrop., T. I. Hydrodynamica.

Euler (1707–1783). Mechanica sive motus scientia (Petersburg, 1736); Methodus inveniendi lineas curvas. Много статей в записках Берл. и Пет. Академий.

Clairaut (1713–1765). Théorie de la figure de la terre (Paris, 1743).

D'Alembert (1717–1783). Traité de dynamique (Paris, 1743).

Lagrange (1736–1813). Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima. Misc. Taurin. 1762; Mécanique analytique (Paris, 1788).

Laplace (1749–1827). Mecanique céleste (Paris, 1799).

Fourier (1768–1830). Théorie analit. de la chaleur (Paris, 1822).

Gauss (1777–1855). Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Comment societ. Gotting, 1829; Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik (Crelle's Journal, IV, 1829); Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata (1832). Gesamtausgabe (Göttingen, 1867).

Poinsot (1777–1859). Eléments de statique (Paris, 1804).

Poncelet (1788–1867). Cours de mécanique (Metz, 1826).

Belanger (1790–1874). Cours de mécanique (Paris, 1847).

Möbius (1790–1867). Statik (Leipzig, 1837).

Coriolis (1792–1843). Traité de mécanique (Paris, 1829).

C. G. J. Jacobi (1804–1851). Vorlesungen über Dynamik.

R. Hamilton (1805–1865). Lectures on Quaternions, 1853.

Grassmann (1809–1877). Ausdehnungslehre (Leipzig, 1844).

H. Hertz (1857–1894). Principien der Mechanik (Leipzig, 1894).

L. Boltzmann. Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik (Leipzig)

A. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik, 4 Bde. (Leipzig, 1898–1900)

Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Hrsgeg. im Auftr. der Akademien zu Göttingen, Leipzig, München und Wien (Leipzig, seit 1898). В IV томе изложена механика и особенно здесь интересна для нас работа Фосса:

A. Voss. Die Prinzipien der rationellen Mechanik, IV, 1, стр. 3–121 (1901).

Предметный указатель

Мах Эрнст

МЕХАНИКА

Историко-критический очерк ее развития

Дизайнер *М. В. Ботя*
Компьютерная подготовка: *С. В. Высоцкий*
А. В. Широбоков
Компьютерная графика *К. В. Шащенко*
Корректор *И. А. Николаева*

Лицензия ЛУ №056 от 06.01.98. Подписано к печати 10.01.00.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,51. Уч. изд. л. 27,2.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага газетная.
Заказ №К170. Тираж 1230 экз.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Ижевской республиканской типографии,
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.